chapitre 5

Régime sinusoïdal forcé

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux circuits linéaires soumis à une excitation (tension ou courant imposé au circuit) variant sinusoïdalement au cours du temps ; c'est le régime sinusoïdal. Celui-ci est extrêmement important, car les courants produits industriellement par des alternateurs sont sinusoïdaux. En Europe, l'amplitude de la tension délivrée aux particuliers est $E_0 = 220$ V pour une fréquence $f = 50$ Hz.

Les notions vues dans le cadre de ce cours sont en fait plus générales. En effet, il existe d'autres phénomènes physiques très importants qui sont sinusoïdaux. La lumière, par exemple, peut être décrite par un champ électrique et un champ magnétique oscillant sinusoïdalement au cours du temps. De même, le son correspond à une variation sinusoïdale de la pression du mileiu dans lequel il se propage. D'une façon générale, les phénomènes ondulatoires sont sinusoïdaux. Les outils introduits ici sont donc généralisables à d'autres parties de la physique.

Plan du chapitre.

1. Circuit linéaire en régime sinusoïdal forcé
   - 1.1 Tension et courant sinusoïdaux
   - 1.2 Régime transitoire et régime forcé d'un circuit RLC
   - 1.3 Déphasage entre tension d'entrée et intensité
2. Notation complexe
   - 2.1 Grandeurs électriques complexes
   - 2.2 Dérivation et intégration en notation complexe
   - 2.3 Détermination du courant en régime forcé
3. Impédance complexe
   - 3.1 Définition
   - 3.2 Cas du résistor
   - 3.3 Cas d'une bobine
   - 3.4 Cas d'un condensateur
4. Lois de l'électrocinétique en régime sinusoïdal
   - 4.1 Lois de Kirchhoff
   - 4.2 Loi d'Ohm
   - 4.3 Association de dipôles
5. Puissance en régime sinusoïdal
   - 5.1 Puissance instantanée
   - 5.2 Puissance moyenne ; grandeurs efficaces
   - 5.3 Exemple d'application : adaptation d'impédance

1 Circuit linéaire en régime sinusoïdal forcé.

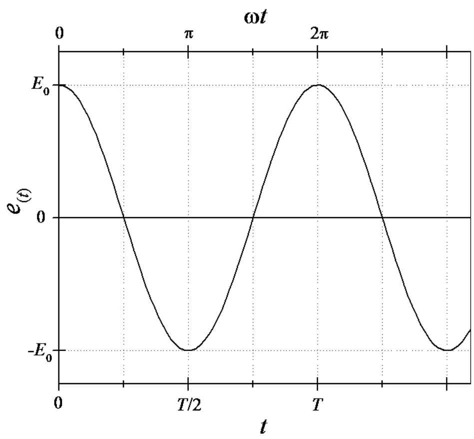
1.1 Tension et courant sinusoïdaux.

Dans ce chapitre, on considère des circuits linéaires comportant des composants R, L et C, alimentés par un générateur de tension sinusoïdale. La tension délivrée est donc de la forme :

$$e_{(t)} = E_0 \cos \omega t \tag{1}$$

où E_0 est l'**amplitude** du signal et ω sa **pulsation**, reliée à la fréquence f ou à la période T par :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\, f \tag{2}$$



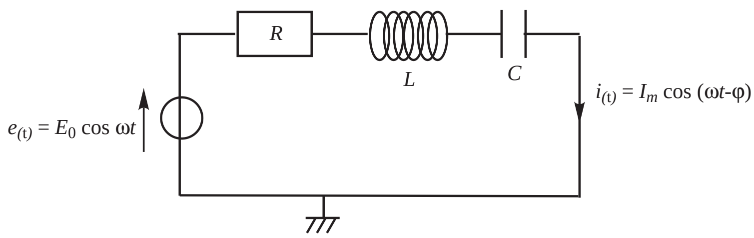
Dans ce cas, le courant circulant à travers le générateur est également sinusoïdal, de même pulsation que e, mais déphasé par rapport à elle :

$$i_{(t)} = I_m \cos(\omega t - \varphi) \tag{3}$$

avec I_m amplitude du courant et φ le déphasage entre le courant et la tension.

1.2 Régime transitoire et régime forcé d'un circuit *RLC*.

Considérons un circuit RLC série, alimenté par un générateur de tension sinusoïdal.



L'équation différentielle vérifiée par l'intensité s'obtient en écrivant la loi des mailles puis en dérivant par rapport au temps :

$$u_{\mathrm{L}} + u_{\mathrm{R}} + u_{\mathrm{C}} = e \Rightarrow L\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + R\,i + \frac{q}{C} = E_0\,\cos\omega t \Rightarrow L\,\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + R\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{i}{C} = -E_0\,\omega\,\sin\omega t \tag{4}$$

Il s'agit d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants. La solution est la somme de deux termes : $i_{(t)} = i_{1\,(t)} + i_{2\,(t)}$. Le terme $i_{1\,(t)}$ est la solution de l'équation homogène :

$$L\,\frac{\mathrm{d}^2 i_1}{\mathrm{d}t^2} + R\,\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \frac{i_1}{C} = 0 \tag{5}$$

Il correspond au *régime transitoire*, et devient très petit au bout d'un temps relativement court, de l'ordre de quelques multiples de la constante de temps $\tau = L/R$. Cette solution sera étudiée en seconde année, tant en électricité que pour des systèmes mécaniques analogues.

Le second terme $i_{2\,(t)}$ est une solution particulière, qui devient **rapidement prépondérante** par rapport à $i_{1\,(t)}$; elle correspond au **régime forcé**. Dans la mesure où $e_{(t)}$ est sinusoïdal, il parait raisonnable de penser que $i_{2\,(t)}$ l'est également ; en effet, si $i_{(t)}$ est sinusoïdal, ses dérivées première et seconde par rapport au temps le sont aussi. Dans tout ce chapitre, on ne s'intéresse qu'au régime forcé qui s'établit rapidement, donc :

$$i_{(t)} = i_{2\,(t)} = I_m\,\cos(\omega t - \varphi) \tag{6}$$

D'une façon générale, une fois le régime transitoire disparu, en régime sinusoïdal forcé, **toutes les grandeurs électriques dans le circuit sont sinusoïdales et synchrones**, c'est-à-dire de **même pulsation**, celle **imposée par le générateur**.

Dans ce chapitre, on ne fera pas d'étude temporelle des circuits, puisque le régime transitoire ne nous intéresse pas. En revanche, on étudiera l'influence de la pulsation d'entrée ω sur la réponse du circuit.

On a choisi de noter le courant $i_{(t)} = I_m\,\cos(\omega t - \varphi)$, mais on aurait aussi bien pu l'écrire $i_{(t)} = I_m\,\cos(\omega t + \varphi)$, ce qui revient à choisir le signe opposé pour le déphasage φ. Lors de la résolution de l'équation, on obtiendra évidemment le même résultat.

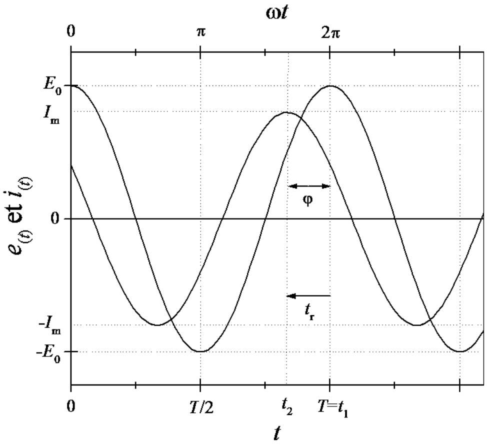
1.3 Déphasage entre tension et intensité.

Considérons un circuit quelconque, par exemple le circuit RLC série du paragraphe précédent, soumis à une tension sinusoïdale $e_{(t)} = E_0\,\cos\omega t$. Il est traversé par un courant sinusoïdal **de même pulsation** $i_{(t)} = I_m\,\cos(\omega t - \varphi)$, où φ est le **déphasage** entre l'intensité et la tension.

1.3.1 Cas du courant en avance sur la tension.

Avec la définition choisie, considérons le cas du schéma suivant. On voit que $e_{(t)}$ et $i_{(t)}$ sont déphasées, puisqu'elles n'atteignent pas leur maxima à la même date.

Considérons une période, par exemple celle entre $t = 0$ et $t = T$. Les **maxima les plus proches** atteints par les deux fonctions sur cette période le sont à la date t_1 pour $e_{(t)}$ et à la date t_2 pour $i_{(t)}$. Le **déphasage** φ se lit directement sur l'axe supérieur (au signe près) ; il correspond à l'angle séparant les maxima les plus proches.



On appelle **retard** de $i_{(t)}$ sur $e_{(t)}$ la grandeur :

$$\boxed{t_{\mathrm{r}} = t_2 - t_1} \tag{7}$$

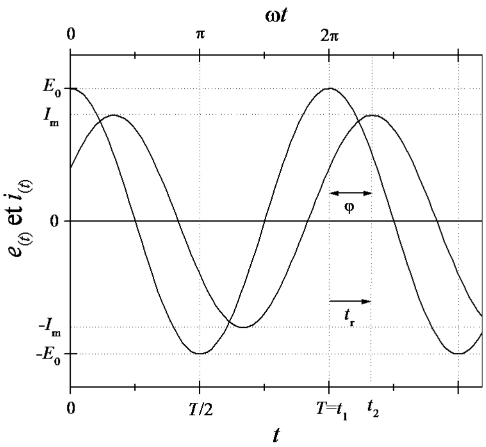
L'**avance** de $i_{(t)}$ sur $e_{(t)}$ la grandeur opposée :

$$t_{\mathrm{a}} = -t_{\mathrm{t}} = t_1 - t_2 \tag{8}$$

Dans ce cas, on constate que le courant $i_{(t)}$ atteint son maximum avant $e_{(t)}$, c'est-à-dire que le retard de $i_{(t)}$ sur $e_{(t)}$ est négatif ($t_{\mathrm{r}} < 0$). On dit que le courant $i_{(t)}$ est **en avance** sur la tension $e_{(t)}$.

1.3.2 Cas du courant en retard sur la tension.

On considère maintenant le cas où les deux maxima les plus proches de $i_{(t)}$ et $e_{(t)}$ sur une période sont tels que $t_{\mathrm{r}} = t_2 - t_1 > 0$. Dans ce cas, le courant atteint son **maximum** après la tension ; on dit que le courant est **en retard** sur la tension.



1.3.3 Relation entre retard et déphasage.

Lorsqu'on parcourt une période, donc lorsque le temps t évolue d'une valeur T, l'angle ωt évolue de 2π. Par une règle de 3 évidente, on a donc :

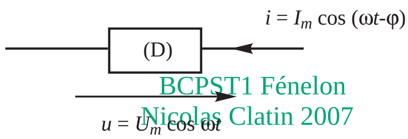
$$\boxed{\frac{|\varphi|}{2\pi} = \frac{|t_2 - t_1|}{T}} \tag{9}$$

Ces notions sont généralisables à deux fonctions sinusoïdales quelconques de même pulsation : $g_1 = G_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ et $g_2 = G_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$. Le déphasage entre g_2 et g_1 est alors $\varphi_2 - \varphi_1$. Dans les exemples précédents, utiles en première année, $\varphi_1 = 0$.

2 Notation complexe.

2.1 Grandeurs électriques complexes.

Considérons un dipôle passif linéaire (D), soumis à une tension sinusoïdale $u_{(t)} = U_m \cos\omega t$. Il est traversé par un courant sinusoïdal $i_{(t)} = I_m \cos(\omega t - \varphi)$.



En régime sinusoïdal, il est commode d'utiliser la **notation complexe**. La tension $u_{(t)} = U_m \cos\omega t$ peut se voir comme la partie réelle de la grandeur complexe :

$$\underline{u} = U_m (\cos\omega t + j \sin\omega t) = U_m \, e^{j\omega t} \tag{10}$$

où $j = \sqrt{-1}$ (qu'on ne note pas i en physique pour ne pas confondre avec le courant). Le trait sous $\underline{u}$ indique une grandeur complexe. On a donc :

$$u_{(t)} = \Re(\underline{u}) \tag{11}$$

Attention ! Ceci n'est vrai qu'en régime sinusoïdal. Si la tension d'entrée est périodique mais non sinusoïdale (tension en créneaux, en triangles, etc), ou non périodique, ce n'est pas vrai.

Toutes les grandeurs électriques du circuit en régime sinusoïdal forcé, courant $i_{(t)}$, tensions aux bornes des différents dipôles $u_{\mathrm{R}\,(t)}$, $u_{\mathrm{C}\,(t)}$ et $u_{\mathrm{L}\,(t)}$, peuvent également s'interprèter comme la partie réelle de grandeurs complexes associées. Ainsi, le courant $i_{(t)} = I_m \cos(\omega t - \varphi)$ est la partie réelle du courant complexe :

$$\underline{i} = I_m \, (\cos(\omega t - \varphi) + j \sin(\omega t - \varphi)) = I_m \, e^{j(\omega t - \varphi)} \tag{12}$$

On peut montrer que, si $i_{(t)}$ est solution de l'équation différentielle (4), alors le courant complexe associé $\underline{i}$ l'est également (il suffit de remplacer dans l'équation différentielle). En conséquence, il est équivalent de raisonner avec les grandeurs complexes et avec les grandeurs réelles. Comme on le verra par la suite, les grandeurs complexes permettent de simplifier les calculs, d'où leur intérêt.

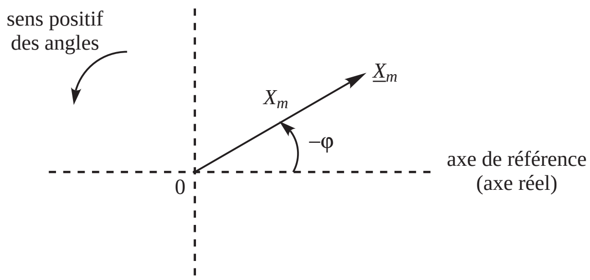
Bien évidemment, les grandeurs complexes n'ont pas de sens physique. **Les grandeurs physiques sont les parties réelles des grandeurs complexes**. Considérons la grandeur électrique complexe quelconque $\underline{x}$ (courant, tension...) :

$$\underline{x} = X_m\,\mathrm{e}^{j(\omega t-\varphi)} = \underline{X_m}\,\mathrm{e}^{j\omega t} \qquad \text{avec} \qquad \underline{X_m} = X_m\,\mathrm{e}^{-j\varphi} \tag{13}$$

où $\underline{X_m}$ est l'**amplitude complexe** de $\underline{x}$. La grandeur réelle, ayant un sens physique, est :

$$x = X_m\,\cos(\omega t-\varphi) \qquad \text{avec} \qquad \boxed{\begin{cases} X_m = |\underline{x}| = |\underline{X_m}| \\ -\varphi = \arg \underline{X_m} \end{cases}} \tag{14}$$

On peut représenter la grandeur $\underline{X_m}$ dans le plan complexe ; c'est la **représentation de Fresnel**.



2.2 Dérivation et intégration en notation complexe.

Considérons le courant réel $i_{(t)} = I_m\,\cos(\omega\,t-\varphi)$. Ses dérivées temporelles sont :

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -I_m\,\omega\,\sin(\omega\,t-\varphi) \tag{15}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} = -I_m\,\omega^2\,\cos(\omega\,t-\varphi) \tag{16}$$

Considérons maintenant la grandeur complexe associée $\underline{i}$ et ses dérivées :

$$\underline{i} = I_m\,(\cos(\omega\,t-\varphi) + j\,\sin(\omega\,t-\varphi))$$

$$\frac{\mathrm{d}\underline{i}}{\mathrm{d}t} = I_m\,\omega\,(-\sin(\omega\,t-\varphi) + j\,\cos(\omega\,t-\varphi)) \tag{17}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\underline{i}}{\mathrm{d}t^2} = I_m\,\omega^2\,(-\cos(\omega\,t-\varphi) - j\,\sin(\omega\,t-\varphi)) \tag{18}$$

En comparant (15) et (17) d'une part et (16) et (18) d'autre part, on constate que :

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \Re\left(\frac{\mathrm{d}\underline{i}}{\mathrm{d}t}\right) \tag{19}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} = \Re\left(\frac{\mathrm{d}^2\underline{i}}{\mathrm{d}t^2}\right) \tag{20}$$

La dérivée de la grandeur complexe permet de retrouver la dérivée de la grandeur réelle ; il suffit de prendre la partie réelle. Ceci est général à toutes les grandeurs électriques du circuit (et pas seulement le courant).

Examinons de plus près la dérivation de la grandeur complexe $\underline{i} = I_m\,\mathrm{e}^{j(\omega t-\varphi)}$ en utilisant la notation exponentielle :

$$\frac{\mathrm{d}\underline{i}}{\mathrm{d}t} = I_m\,j\omega\,\mathrm{e}^{j(\omega t-\varphi)} = j\omega\,\underline{i} \tag{21}$$

On retrouve bien l'expression (17) :

$$\begin{aligned} I_m\,j\omega\,\mathrm{e}^{j(\omega t-\varphi)} &= I_m\,j\omega\,\left(\cos(\omega\,t-\varphi) + j\,\sin(\omega\,t-\varphi)\right) \\ &= I_m\,\omega\,\left(j\,\cos(\omega\,t-\varphi) - \sin(\omega\,t-\varphi)\right) \end{aligned}$$

En notation complexe, la dérivation revient donc à une simple multiplication par $j\omega$. Pour une grandeur électrique quelconque $\underline{x} = X_m\,\mathrm{e}^{j(\omega t-\varphi)}$, on a donc :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\underline{x}}{\mathrm{d}t} = j\omega\,\underline{x}} \tag{22}$$

De la même façon, l'intégration revient à une division par $j\omega$:

$$\boxed{\int \underline{x} = \frac{\underline{x}}{j\omega}} \tag{23}$$

2.3 Détermination du courant en régime forcé

Reprenons le circuit RLC série du paragraphe 1. On se place en régime sinusoïdal forcé, c'est-à-dire que le régime transitoire est devenu négligeable. Alors $i_{(t)}$ est sinusoïdal : $i_{(t)} = I_m\,\cos(\omega t-\varphi)$. Le courant vérifie l'équation différentielle (4). Comme on l'a vu, il est équivalent de raisonner avec les grandeurs complexes associées : $\underline{e} = E_0\,\mathrm{e}^{j\omega t}$ et $\underline{i} = I_m\,\mathrm{e}^{j(\omega t-\varphi)} = \underline{I_m}\,\mathrm{e}^{j\omega t}$, avec $\underline{I_m} = I_m\,\mathrm{e}^{-j\varphi}$. L'équation différentielle devient alors :

$$L\,\frac{\mathrm{d}^2\underline{i}}{\mathrm{d}t^2} + R\,\frac{\mathrm{d}\underline{i}}{\mathrm{d}t} + \frac{\underline{i}}{C} = \frac{\mathrm{d}\underline{e}}{\mathrm{d}t} \tag{24}$$

Utilisons les règles de dérivation établies précédemment :

$$L\,(j\omega)^2\underline{i} + R\,j\omega\,\underline{i} + \frac{\underline{i}}{C} = j\omega\,\underline{e} = j\omega\,E_0\,\mathrm{e}^{j\omega t} \tag{25}$$

On en déduit :

$$\left(-L\omega^2 + \frac{1}{C} + j\omega\,R\right)\,\underline{i} = j\omega\,E_0\,\mathrm{e}^{j\omega t} \Rightarrow \underline{i} = \frac{j\omega\,E_0}{-L\omega^2 + \dfrac{1}{C} + j\omega\,R}\,\mathrm{e}^{j\omega t} = \underline{I_m}\,\mathrm{e}^{j\omega t} \tag{26}$$

d'où :

$$\underline{I_m} = I_m\,\mathrm{e}^{-j\varphi} = \frac{j\omega\,E_0}{-L\omega^2 + \dfrac{1}{C} + j\omega\,R} \tag{27}$$

Le courant en régime forcé est alors entièrement connu, si E_0, R, L et C sont connus. On peut calculer l'amplitude du courant $I_m = \left|\underline{I_m}\right|$ et son déphasage $\varphi = -\arg\underline{I_m}$, en utilisant les propriétés habituelles des complexes.

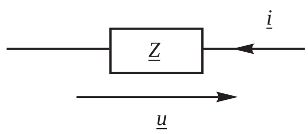
3 Impédance complexe.

On va généraliser les notions vues précédemment pour un dipôle quelconque, puis pour un ensemble de dipôles. La notation complexe permet de retrouver, avec les grandeurs sinusoïdales, des formules analogues à celles trouvées en régime continu.

3.1 Définition.

Considérons un circuit dipôle (D), soumis à une tension sinusoïdal $u_{(t)}$, et parcouru par un courant sinusoïdal $i_{(t)}$. Soit $\underline{u} = U_m \, \mathrm{e}^{j\omega t}$ et $\underline{i} = I_m \, \mathrm{e}^{j(\omega t - \varphi)}$ les grandeurs complexes associées. On appelle **impédance complexe** du dipôle (D) :

$$\boxed{\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{U_m}{I_m} \, \mathrm{e}^{j\varphi}} \tag{28}$$



L'impédance est la grandeur fondamentale du circuit électrique. En effet, E_0 étant connu, la connaissance de $\underline{Z}$ donne accès à I_m et à φ, donc au courant électrique qui circule. Son module $Z = |\underline{Z}|$ donne accès à I_m et son argument est le déphasage φ :

$$\underline{Z} = Z \, \mathrm{e}^{j\varphi} \qquad \text{avec} \qquad \boxed{\left\{ \begin{array}{l} |\underline{Z}| = Z = \dfrac{U_m}{I_m} \\ \arg \underline{Z} = \varphi = \arg \underline{u} - \arg \underline{i} \end{array} \right.} \tag{29}$$

La formule $\arg \underline{Z} = \arg \underline{u} - \arg \underline{i}$ montre que **l'argument de $\underline{Z}$ donne le retard de i par rapport à u.**

L'impédance complexe peut également se mettre sous la forme rectangulaire :

$$\boxed{\underline{Z} = R + jX} \tag{30}$$

où R est une **résistance**, terme toujours positif, et X est une **réactance**, qui peut être positive ou négative. Le module de l'impédance Z est donc homogène à une résistance, et **s'exprime en ohm**. On peut l'exprimer en fonction de R et X :

$$\boxed{Z = |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + X^2}} \tag{31}$$

Par ailleurs, en identifiant les deux expressions :

$$\underline{Z} = Z \, \mathrm{e}^{j\varphi} = R + jX \tag{32}$$

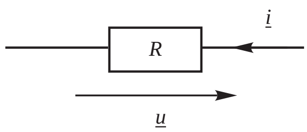
on peut exprimer le déphasage en fonction de R et X :

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{R}{Z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X^2}}} \qquad \boxed{\sin\varphi = \frac{X}{Z} = \frac{X}{\sqrt{R^2 + X^2}}} \qquad \boxed{\tan\varphi = \frac{X}{R}} \tag{33}$$

3.2 Cas d'un résistor.

Dans le cas d'un résistor de résistance R, la relation entre le courant et la tension est :

$$i = \frac{u}{R} \Rightarrow I_m \cos(\omega t - \varphi) = \frac{U_m \cos \omega t}{R} \tag{34}$$



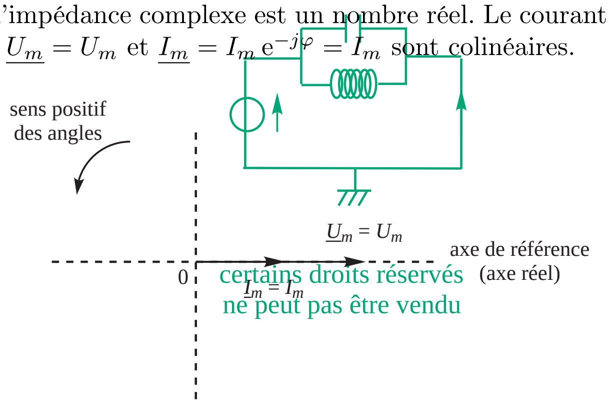
Par identification :

$$I_m = \frac{U_m}{R} \qquad \text{et} \qquad \varphi = 0 \tag{35}$$

On en déduit les caractéristiques de l'impédance complexe associée au résistor :

$$\begin{cases} Z_R = \left|\underline{Z_R}\right| = \dfrac{U_m}{I_m} = R \\ \arg \underline{Z_R} = \varphi = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\underline{Z_R} = R} \tag{36}$$

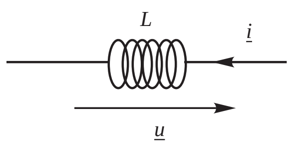
Dans le cas d'un résistor, l'impédance complexe est un nombre réel. Le courant et la tension sont **en phase**. En représentation de Fresnel, $\underline{U_m} = U_m$ et $\underline{I_m} = I_m\,\mathrm{e}^{-j\varphi} = I_m$ sont colinéaires.



3.3 Cas d'une inductance idéale.

La relation entre le courant et la tension est maintenant :

$$u = L\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \Rightarrow U_m\, cos\omega t = L\,\frac{\mathrm{d}(I_m \cos(\omega t - \varphi))}{\mathrm{d}t} = -L\,I_m\,\omega\,\sin(\omega t - \varphi) = L\,I_m\,\omega\,\cos(\omega t - \varphi + \pi/2) \tag{37}$$



Par identification, on obtient :

$$U_m = L\,\omega\,I_m \qquad \text{et} \qquad \varphi = \pi/2 \tag{38}$$

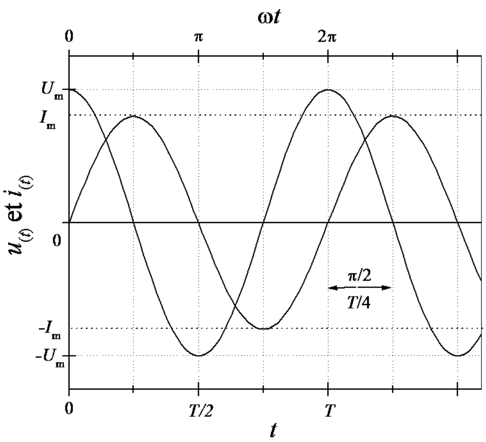
L'impédance complexe associée à l'inductance vérifie donc :

$$\begin{cases} Z_L = \left|\underline{Z_L}\right| = \dfrac{U_m}{I_m} = L\,\omega \\ \arg \underline{Z_L} = \varphi = \pi/2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\underline{Z_L} = L\,\omega\,\mathrm{e}^{j\pi/2} = j\,L\,\omega} \tag{39}$$

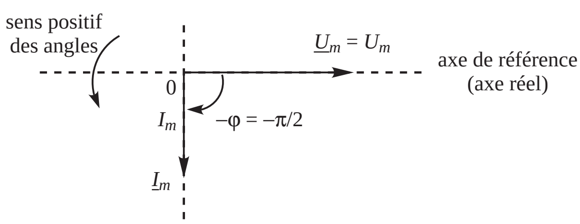
Dans le cas d'une inductance, l'impédance complexe est un imaginaire pur. Le courant est déphasé de $\pi/2$ par rapport à la tension :

$$i = I_m\,\cos(\omega t - \pi/2) = I_m\,\sin\omega t \tag{40}$$

Le courant i est en quadrature retard par rapport à u ; le décalage temporel correspondant est un quart de période $T/4$. Comme le schéma le montre immédiatement, **dans un circuit inductif pur, le courant est en quadrature retard sur la tension**.



Sur un diagramme de Fresnel, $\underline{U_m}$ et $\underline{I_m} = I_m\,\mathrm{e}^{-j\varphi}$ sont perpendiculaires.

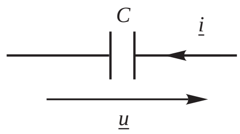


On peut examiner deux cas particuliers intéressants. Si $\omega = 0$ (régime continu), alors $\underline{Z_L} = 0$ et $\underline{u} = \underline{Z_L}\,\underline{i} = 0$; l'inductance se comporte comme un fil sans résistance, c'est-à-dire comme un court-circuit. Inversement, si $\omega \to \infty$, alors d'après (38) $U_m \to \infty$, c'est-à-dire que la bobine se comporte comme un circuit ouvert.

3.4 Cas d'une capacité idéale.

La relation entre le courant et la tension est désormais :

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = C\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \Rightarrow u = \frac{1}{C}\int i \tag{41}$$



Raisonnons cette fois-ci directement en notation complexe. La tension complexe $\underline{u}$ est reliée au courant complexe par :

$$\underline{u} = \frac{1}{C}\int \underline{i} = \frac{1}{C}\,\frac{\underline{i}}{j\omega} \tag{42}$$

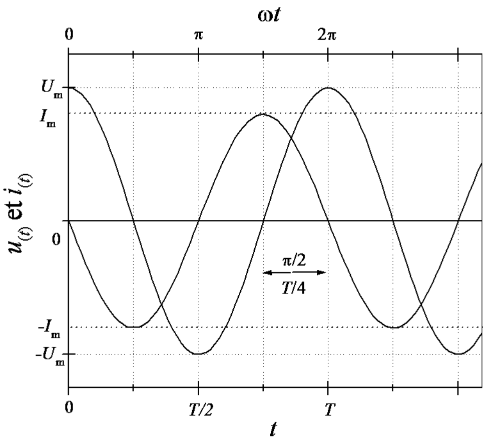
On en déduit l'impédance complexe :

$$\boxed{\underline{Z_C} = \frac{1}{jC\omega} = -\frac{j}{C\omega}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} Z_C = \left|\underline{Z_C}\right| = \dfrac{1}{C\omega} \\ \varphi = \arg \underline{Z_C} = -\pi/2 \end{cases} \tag{43}$$

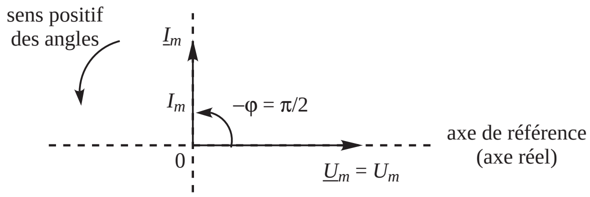
Comme pour une inductance, l'impédance complexe associée à une capacité est un imaginaire pur. Le courant est déphasé de $\pi/2$ par rapport à la tension :

$$i = I_m \cos\left(\omega t + \pi/2\right) = -I_m \sin \omega t \tag{44}$$

Le courant i est en quadrature avance par rapport à u ; le décalage temporel correspondant est un quart de période $T/4$. **Dans un circuit capacitif pur, le courant est en quadrature avance sur la tension**.



Sur un diagramme de Fresnel, $\underline{U_m}$ et $\underline{I_m} = I_m\,\mathrm{e}^{-j\varphi}$ sont perpendiculaires.



Considérons les deux mêmes cas particuliers. Si $\omega = 0$ (régime continu), alors $Z_C \to \infty$ donc $U_m \to \infty$; la capacité se comporte comme un circuit ouvert. Inversement, si $\omega \to \infty$, alors $\underline{Z_C} = 0$ et $\underline{u} = \underline{Z_C}\,\underline{i} = 0$; la capacité se comporte comme un fil sans résistance, c'est-à-dire comme un court-circuit.

4 Lois de l'électrocinétique en régime sinusoïdal.

4.1 Lois de Kirchhoff.

Les grandeurs physiques $i_{(t)}$ et $u_{(t)}$ étant les parties réelles des grandeurs complexes associées $\underline{i}$ et $\underline{u}$, les lois de Kirchhoff sont valables avec les grandeurs complexes. En effet, celle-ci mettent en jeu l'addition de courants (loi des nœuds) et l'addition de tension (loi des mailles), or la partie réelle d'une somme est la somme des parties réelles.

En conséquences, **avec les grandeurs complexes**, il est possible d'utiliser pour l'étude des circuits en régime sinusoïdal forcé :
- la loi des nœuds,
- la loi des mailles,
- la loi de Pouillet,
- les diviseurs de tension et de courant.

Attention ! ces formules ne sont pas valables avec les modules de $\underline{u}$, $\underline{i}$ et $\underline{Z}$.

4.2 Loi d'Ohm.

La loi d'Ohm, valable pour les résistances, se généralise en régime sinusoïdal forcé. Pour un dipôle d'impédance complexe $\underline{Z}$, soumis à une tension $\underline{u}$ et parcouru par un courant $\underline{i}$, on a :

$$\boxed{\underline{u} = \underline{Z}\,\underline{i}} \tag{45}$$

En remplaçant ces différentes grandeurs par leurs expressions, on a alors :

$$U_m\,\mathrm{e}^{j\omega t} = Z\,\mathrm{e}^{j\varphi}\,I_m\,\mathrm{e}^{j(\omega t-\varphi)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{U_m = Z\,I_m} \tag{46}$$

c'est-à-dire que la loi d'Ohm s'applique aussi pour les amplitudes.

4.3 Association de dipôles.

Les lois d'association des résistances se généralisent aux impédances complexes. Pour des impédances complexes $\underline{Z_k}$ **en série**, l'impédance complexe équivalente est la somme des impédances :

$$\boxed{\underline{Z_{\mathrm{eq}}} = \sum \underline{Z_k}} \tag{47}$$

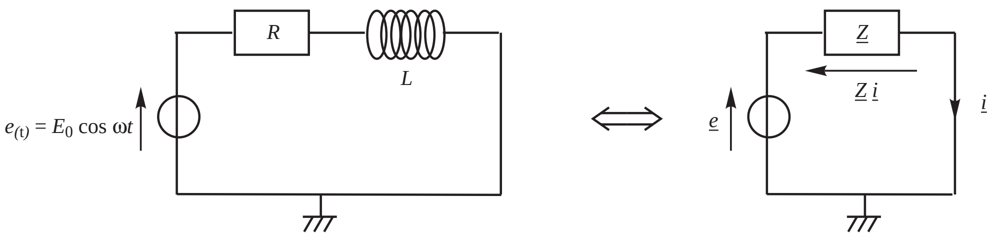
Pour des impédances **en parallèle**, la sommation se fait sur les inverses, c'est-à-dire que l'impédance complexe équivalente vérifie :

$$\boxed{\frac{1}{\underline{Z_{\mathrm{eq}}}} = \sum \frac{1}{\underline{Z_k}}} \tag{48}$$

Les démonstrations de ces relations sont analogues à celles faites pour les associations de résistances en régime continu, moyennant l'utilisation de la loi d'Ohm pour les grandeurs complexes.

Attention ! ces relations ne sont en revanche pas valables pour les modules des impédances.

Prenons l'exemple d'une bobine réelle, composée d'une inductance L en série avec une résistance R, alimentée sous une tension sinusoïdale $e = E_0 \cos \omega t$. On veut déterminer l'amplitude du courant qui traverse la bobine, et son retard par rapport à la tension d'entrée.



En notation complexe, la tension d'entrée est : $\underline{e} = E_0\, \mathrm{e}^{j\omega t}$ et le courant est de la forme :

$$\underline{i} = I_m\, \mathrm{e}^{j(\omega t - \varphi)} = \underline{I_m}\, \mathrm{e}^{j\omega t} \qquad \text{avec} \qquad \underline{I_m} = I_m\, \mathrm{e}^{-j\varphi} \tag{49}$$

La résistance et l'inductance en série sont équivalentes à une impédance complexe :

$$\underline{Z} = R + jL\omega \tag{50}$$

En appliquant la loi de Pouillet, on a :

$$\underline{e} - \underline{Z}\,\underline{i} = 0 \Rightarrow \underline{i} = \frac{\underline{e}}{\underline{Z}} = \frac{E_0\, \mathrm{e}^{j\omega t}}{R + jL\omega} \tag{51}$$

C'est souvent une très mauvaise idée en électrocinétique de rendre le dénominateur réel. Cela alourdit les expressions, et empêche souvent de voir des simplifications dans les expressions ultérieures.

Par identification avec (49), on en déduit l'amplitude complexe du courant :

$$\underline{I_m} = I_m\, \mathrm{e}^{-j\varphi} = \frac{E_0}{R + jL\omega} \tag{52}$$

L'amplitude I_m du courant réel est le module de $\underline{I_m}$, soit :

$$I_m = \left|\underline{I_m}\right| = \frac{|E_0|}{|R + jL\omega|} = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \tag{53}$$

Le déphasage entre courant et intensité est donné par l'argument de $\underline{I_m}$:

$$\varphi = -\arg \underline{I_m} = -\arg E_0 + arg(R + jL\omega) = arg(R + jL\omega) \tag{54}$$

d'où on déduit :

$$\left\{ \begin{aligned} &\tan \varphi = \frac{L\omega}{R} \\ &\cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \end{aligned} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} &\varphi = \arctan \frac{L\omega}{R} \\ &\cos \varphi > 0 \Rightarrow -\pi/2 < \varphi < \pi/2 \end{aligned} \right. \tag{55}$$

Comme $\tan \varphi > 0$, on en déduit que $0 < \varphi < \pi/2$. Cela correspond à un courant en retard sur la tension.

Attention ! $\tan \varphi$ ne définit φ qu'à π près. Il est indispensable de déterminer le signe de $\cos \varphi$ ou de $\sin \varphi$ pour lever l'ambiguïté.

5 Puissance en régime sinusoïdal.

5.1 Puissance instantanée.

Considérons un dipôle soumis à une tension sinusoïdale $u_{(t)} = U_m \cos \omega t$ et traversé par un courant sinusoïdal $i_{(t)} = I_m \cos(\omega t - \varphi)$, orienté en convention récepteur.

La **puissance instantanée** reçue par le dipôle est :

$$p_{(t)} = u_{(t)} \cdot i_{(t)} = U_m I_m \cos \omega t \cos(\omega t - \varphi) = \frac{U_m I_m}{2} \left[\cos \varphi + \cos(2\omega t - \varphi)\right] \tag{56}$$

Dans le cas d'un résistor, $\varphi = 0$ et la puissance instantanée est toujours positive :

$$p_{(t)} = \frac{U_m I_m}{2} \left[1 + \cos 2\omega t\right] \Rightarrow \forall t,\, p_{(t)} > 0 \tag{57}$$

ce qui signifie qu'à tout instant, le résistor dissipe de l'énergie, ce qui est attendu.

Le terme entre crochet dans (56) peut être négatif ou positif ; ceci signifie que, dans le cas général, le dipôle peut être soit récepteur (il dissipe alors de l'énergie) ou générateur (il fournit alors de l'énergie au circuit). Au cours d'une période, il peut éventuellement jouer l'un puis l'autre rôle. Par exemple, dans le cas d'une capacité, $\varphi = -\pi/2$ et :

$$p_{(t)} = \frac{U_m I_m}{2} \cos(2\omega t + \pi/2) = -\frac{U_m I_m}{2} \sin 2\omega t \tag{58}$$

La puissance varie alors sinusoïdalement entre $-\dfrac{U_m I_m}{2}$ et $\dfrac{U_m I_m}{2}$ avec une période $T/2$. Sur une demi-période, elle dissipe de l'énergie, et sur la demi-période suivante, elle restitue de l'énergie au circuit. Il en est de même d'une inductance.

5.2 Puissance moyenne ; grandeurs efficaces.

5.2.1 Définition.

On veut maintenant exprimer la puissance moyenne consommée dans un dipôle sur un temps très long. En effet, les temps d'utilisation des circuits sont souvent long devant la période des signaux (20 ms pour une fréquence de 50 Hz) ; il est donc intéressant de déterminer la puissance dissipée sur une longue durée. Commençons par examiner ce qui se passe sur une période. Par définition de la puissance, l'énergie reçue par le dipôle pendant un intervalle de temps très court dt est :

$$\delta W = p_{(t)}\,\mathrm{d}t \tag{59}$$

L'énergie reçue par le dipôle pendant une période s'obtient par intégration sur une période quelconque, par exemple entre les instants 0 et T :

$$W = \int_0^T p_{(t)}\,\mathrm{d}t \tag{60}$$

La puissance moyenne reçue par le dipôle est le rapport de l'énergie reçue sur le temps durant lequel cette énergie a été reçue :

$$\boxed{P = \frac{1}{T} \int_0^T p_{(t)}\,\mathrm{d}t} \tag{61}$$

Qu'en est-il sur un temps t beaucoup plus long qu'une période ? Ce temps peut s'exprimer sous la forme d'une succession de périodes et d'un reliquat, soit $kT + t'$ où k est un entier et $t' < T$. Si k est très grand, on peut négliger ce qui se passe sur le reliquat t' par rapport à ce qui se passe sur le grand nombre de périodes qui a précédé. En conséquence, la puissance moyenne consommée sur un temps très grand se réduit à la puissance moyenne consommée sur une période.

5.2.2 Expression de la puissance moyenne ; facteur de puissance.

En remplaçant $p_{(t)}$ par sa valeur, l'intégrale s'écrit :

$$\int_0^T \frac{U_m\,I_m}{2}\,[\cos\varphi + \cos(2\omega t - \varphi)]\,\mathrm{d}t = \frac{U_m\,I_m}{2}\int_0^T \cos\varphi\,\mathrm{d}t + \frac{U_m\,I_m}{2}\int_0^T \cos(2\omega t - \varphi)\,\mathrm{d}t \tag{62}$$

Le second terme est nul ; en effet :

$$\begin{aligned}\int_0^T \cos(2\omega t - \varphi)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2\omega}\,[\sin(2\omega t - \varphi)]_0^T &= -\frac{1}{2\omega}\,[\sin(2\omega T - \varphi) - \sin(-\varphi)] \\ &= -\frac{1}{2\omega}\,[\sin(4\pi - \varphi) - \sin(-\varphi)] = 0\end{aligned} \tag{63}$$

Comme $\cos\varphi$ ne dépend pas du temps, (61) se réduit à :

$$P = \frac{U_m\,I_m}{2T}\,\cos\varphi\int_0^T \mathrm{d}t \tag{64}$$

La **puissance moyenne** reçue par le dipôle est donc :

$$\boxed{P = \frac{U_m\,I_m}{2}\,\cos\varphi} \tag{65}$$

Le terme $\cos\varphi$ est appelé le **facteur de puissance**. Le terme qui le précède peut être récrit sous la forme :

$$\frac{U_m\,I_m}{2} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \times \frac{I_m}{\sqrt{2}} = U \times I \tag{66}$$

où U et I sont appelé la **tension efficace** et le **courant efficace**. Le terme $U\,I$ est la **puissance apparente**. On a donc :

$$\boxed{P = U\,I\,\cos\varphi} \tag{67}$$

5.2.3 Dissipation d'énergie dans la partie résistive d'un dipôle.

On a vu que le courant et la tension sont en quadrature aux bornes d'une inductance idéale et aux bornes d'une capacité idéale, soit $\varphi = \pm\pi/2$. On a alors $\cos\varphi = 0$, c'est-à-dire que :

la puissance moyenne consommée dans une capacité idéale ou dans une inductance idéale est nulle.

Dans le cas d'un dipôle quelconque, ou d'une association de dipôles d'impédance totale $\underline{Z} = R + jX = Z\,\mathrm{e}^{j\varphi}$, on a :

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z} \tag{68}$$

Comme d'autre part, la loi d'Ohm est vérifiée pour les amplitudes (relation (46)), on a :

$$P = \frac{U_m\,I_m}{2}\,\cos\varphi = \frac{Z\,I_m\,I_m}{2} \times \frac{R}{Z} = \frac{R\,I_m^2}{2} \quad\Rightarrow\quad \boxed{P = R\,I^2} \tag{69}$$

où I est l'intensité efficace traversant le circuit. On en déduit que dans un dipôle quelconque, **seule la partie résistive consomme de l'énergie en moyenne.**

Il peut parfois être commode de calculer P en fonction de U :

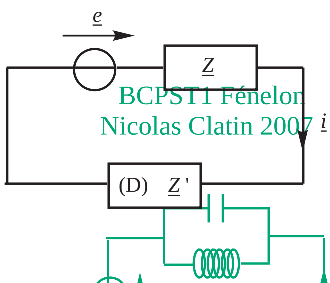
$$P = \frac{R\,I_m^2}{2} = \frac{R\,U_m^2}{2\,Z^2} = \frac{R\,U_m^2}{2\,(R^2+X^2)} = \frac{G\,U_m^2}{2} \qquad \text{avec} \qquad G = \frac{R}{R^2+X^2} \tag{70}$$

expression dans laquelle le terme G est la conductance du dipôle, qui est en fait la partie réelle de $1/\underline{Z}$.

Attention ! la conductance G n'est pas l'inverse de la résistance R, sauf pour un circuit uniquement résistif.

5.3 Exemple d'application : adaptation d'impédance.

Soit un générateur de tension sinusoïdale, délivrant une tension $\underline{e} = E_0\,\mathrm{e}^{j\omega t}$, possédant une impédance interne $\underline{Z} = R + jX$. On le branche sur un dipôle d'impédance $\underline{Z'} = R' + jX'$. Le courant traversant le dipôle est $\underline{i} = I\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{(j\omega t - \varphi)}$. On souhaite que le dipôle reçoive le maximum de puissance.



Calculons le courant qui circule dans le circuit en appliquant la loi de Pouillet :

$$\underline{e} = (\underline{Z} + \underline{Z'})\,\underline{i} \Rightarrow E_0 = |\underline{Z} + \underline{Z'}|\;I_m = \sqrt{(R+R')^2 + (X+X')^2}\;I_m \tag{71}$$

Le courant efficace est donc :

$$I = \frac{E_0}{\sqrt{2}\,\sqrt{(R+R')^2 + (X+X')^2}} \tag{72}$$

La puissance consommé dans le dipôle l'est uniquement dans sa partie résistive, soit :

$$P = R'\,I^2 = \frac{R'\,E_0^2}{2[(R+R')^2 + (X+X')^2]} \tag{73}$$

Le générateur étant donné, R, X et E_0 sont fixés. Pour une partie résistive R' donnée du dipôle, la puissance est maximale si $X + X' = 0$ soit $X = -X'$. Ceci peut s'obtenir en rajoutant en série ou en parallèle au dipôle des capacités ou des inductances idéales.

Ceci étant réalisé, pour quelle valeur de R' la puissance dissipée est-elle maximale ? On a :

$$P = \frac{R'\,E_0^2}{2\,(R+R')} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}R'} = \frac{E_0^2}{2}\left[\frac{1}{(R+R')^2} - \frac{2R'}{(R+R')^3}\right] = \frac{E_0^2}{2\,(R+R')^3}\,(R-R') \tag{74}$$

La puissance dissipée est extrêmale si $R = R'$. On peut aisément montrer qu'il s'agit d'un maximum. En définitive, la puissance dissipée par le dipôle est maximale lorsque $Z' = R - jX$; on a alors *adapté* l'impédance du dipôle.