

MÉCANIQUE

chapitre 2

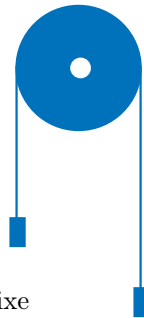
Le solide au repos Équilibre du solide

La *statique* est l'étude des interactions agissant sur un système au repos, c'est-à-dire qui n'est animé d'aucun mouvement dans le référentiel de l'observateur. C'est un cas particulier de la dynamique, qui étudie les mouvements des systèmes matériels sous l'action de contraintes extérieures. Dans ce chapitre, on étudiera la statique du solide, dans le cas particulier où celui-ci est indéformable.

Plan du chapitre.

1. Notion d'équilibre
 - 1.1 Définition
 - 1.2 Importance du référentiel d'étude
2. Première condition nécessaire
 - 2.1 Repos du centre de gravité
 - 2.2 Application
3. Deuxième condition nécessaire
 - 3.1 Moment d'une force par rapport à un axe fixe
 - 3.2 Le solide au repos

BCPST1 Fénelon
Nicolas Clatin 2007



certains droits réservés
ne peut pas être vendu

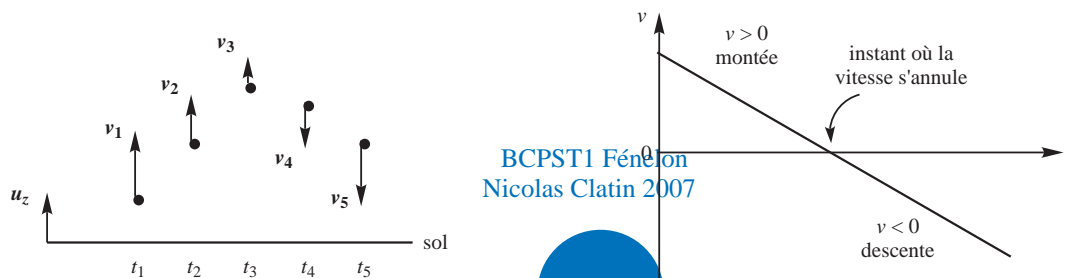
1 Notion d'équilibre.

1.1 Définition.

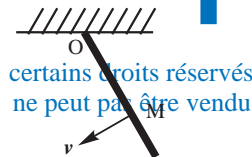
Un système S est dit à l'équilibre s'il est dépourvu de mouvement dans le référentiel d'étude : sa position ne varie pas dans le repère choisi, c'est-à-dire que la vitesse de chacun de ses points est nulle à tout instant :

$$\forall t, \forall M \in \{S\}, \vec{v}_M = \vec{0} \quad (1)$$

Il est important de noter que la vitesse doit être nulle à chaque instant. En effet, pour un système en mouvement, la vitesse peut être nulle à un instant donné. Par exemple, un objet lancé en l'air verticalement a une vitesse nulle à l'instant où son mouvement change de direction, c'est-à-dire au sommet de sa trajectoire. Avant cet instant, la vitesse est dirigée vers le haut, soit $v > 0$ avec $\vec{v} = v \vec{u}_z$; après cet instant, $v < 0$. La vitesse étant continue, elle s'annule nécessairement à un instant donné. Dans ce cas particulier, la vitesse v est une fonction affine du temps.



Il faut de même noter que la vitesse doit être nulle en chacun des points du système. En effet, un système peut être en mouvement bien qu'un de ses points reste immobile. Par exemple, dans un pendule constitué d'une barre rigide qui oscille, le point d'attache du pendule O reste fixe.



1.2 Importance du référentiel d'étude.

Un référentiel est l'association d'un repère lié à l'observateur (système de trois axes permettant de préciser la position) et d'une horloge donnant l'heure locale; on reviendra sur les référentiels ultérieurement.

La notion d'équilibre est intimement liée au référentiel d'étude choisi. Considérons un repère lié à la salle de classe, et le temps local donné par une montre. Dans ce référentiel, une table est immobile; elle est à l'équilibre. Cependant, pour un observateur positionné sur le Soleil, la table se déplace à environ $100000 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, selon une trajectoire complexe due aux rotations de la Terre autour du Soleil et de la Terre sur elle-même. Pour cet observateur, la table n'est pas en équilibre.

En pratique, dans ce chapitre, on raisonnera dans le référentiel local, lié à la Terre au niveau de l'observateur.

2 Première condition nécessaire.

2.1 Repos du centre de gravité.

Comme on le verra lors du cours de dynamique, la deuxième loi de Newton relie la somme des forces extérieures appliquées à un système de masse m à l'accélération de son centre de gravité G :

$$m \vec{a}_G = \sum \vec{F}_{\text{ext}} \iff m \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{ext}} \quad (2)$$

L'équilibre correspondant à une vitesse nulle de tous les points du système à chaque instant, on a en particulier une vitesse nulle du centre de gravité, soit **nécessairement** la somme des forces appliquées nulle :

$$\vec{v}_G = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}_G = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}} \quad (3)$$

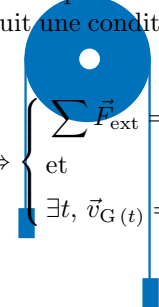
Est-ce une condition suffisante ? Si la somme des forces extérieures est nulle, ceci implique que l'accélération est nulle :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}_G = \vec{0} \Rightarrow \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_G = \vec{c}t \quad (4)$$

BCPST1 Fénelon

Nicolas Clatin 2007

La vitesse de G est constante, mais cette constante n'est pas nécessairement nulle. La nullité de la somme des forces est donc seulement une condition nécessaire. Cependant, si à un instant donné, on sait que la vitesse de G est nulle, alors la constante est nulle. On en déduit une condition nécessaire et suffisante pour que le centre de gravité du système soit au repos :

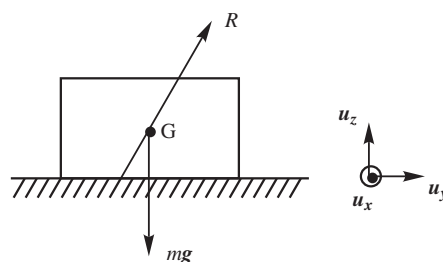


$$\vec{v}_G = \vec{0} \forall t \iff \left\{ \begin{array}{l} \sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0} \\ \text{et} \\ \exists t, \vec{v}_G(t) = \vec{0} \end{array} \right. \quad (5)$$

2.2 Exemple d'application.

Soit un pavé de masse m au repos sur un support horizontal. La condition d'équilibre permet de déterminer la réaction du support.

certains droits réservés
ne peut pas être vendu



Puisque le solide est au repos, la vitesse de son centre de gravité est nulle. On en déduit une relation entre les forces extérieures appliquées, qui sont le poids d'une part et la réaction du support d'autre part :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0} \Rightarrow m\vec{g} + \vec{R} = \vec{0} \quad (6)$$

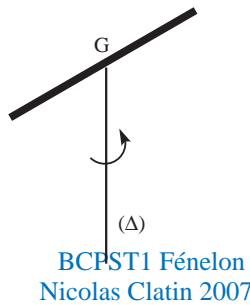
La résolution générale se fait de la façon suivante : si un vecteur est nul, toutes ses **composantes** selon les axes du repère d'espace $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ le sont aussi. Comme le poids est vertical, cela s'écrit :

$$\begin{cases} 0 + R_x = 0 \\ 0 + R_y = 0 \\ -mg + R_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \\ R_z = mg \end{cases} \quad (7)$$

Ce système définit entièrement la réaction du support, en donnant la valeur de chacune de ses composantes dans le repère d'espace ; ici $\vec{R} = mg\vec{u}_z$. Dans ce cas particulier très simple, on peut évidemment raisonner plus rapidement ; en effet, la relation (6) implique que \vec{R} est l'opposée du poids.

3 Deuxième condition nécessaire.

La condition $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$ est-elle l'unique condition nécessaire pour que le système soit au repos ? Comme on l'a vu, cette condition est nécessaire pour que le centre de gravité du système soit immobile, mais elle n'indique rien sur les autres points du système. Prenons le cas d'une barre homogène horizontale fixée sur un axe vertical (Δ) au niveau de son centre de gravité G. Si la barre est en rotation autour de (Δ), le centre de gravité est immobile ($\vec{v}_G = \vec{0}$), bien que la barre ne soit clairement pas en équilibre.



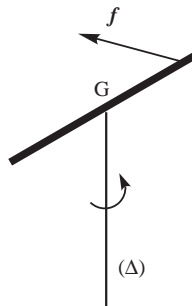
La condition nécessaire $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$ est réalisée puisque le centre de gravité est immobile, mais il faut manifestement en trouver une autre pour que le repos du système complet soit assuré.

Le fait que le centre de gravité soit immobile signifie que le système ne subit pas de translation globale ; il reste au même endroit. Cependant, il est animé d'un mouvement de rotation autour d'un de ses éléments (ici autour d'un axe passant par son centre de gravité). Ceci est un cas particulier du problème plus général de la rotation du système autour d'un point fixe. On peut rapidement parvenir à des complications : dans le cas d'une toupie par exemple, il y a une rotation de la toupie autour de son axe de symétrie, mais cet axe est lui-même en rotation autour de la verticale. La rotation terrestre obéit à la même loi (phénomène de nutation de l'axe terrestre). La dynamique de la rotation n'est pas au programme de BCPST ; on ne s'intéressera qu'à la condition d'équilibre.

certains droits réservés
ne peut pas être vendu

3.1 Moment d'une force par rapport à un axe fixe.

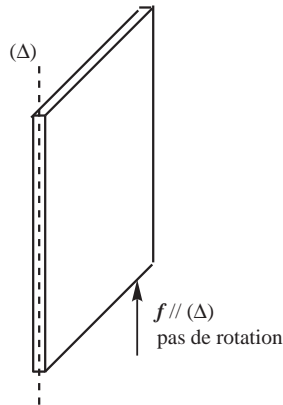
Comment la barre ci-dessus a-t-elle été mise en mouvement ? De façon intuitive, on comprend qu'il a fallu appliquer une force \vec{f} en un point M de la barre différent de G. On va rechercher à quelle condition cette force permet la mise en rotation de la barre autour de l'axe (Δ).



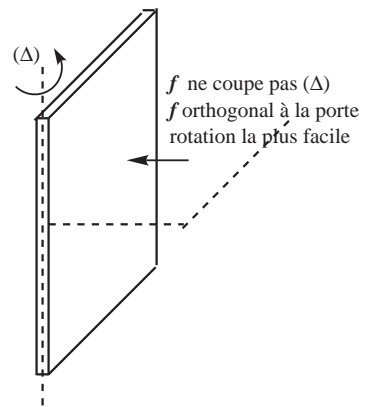
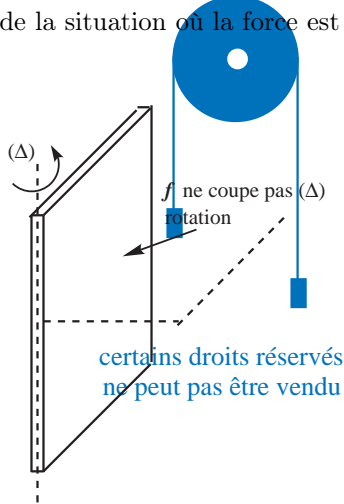
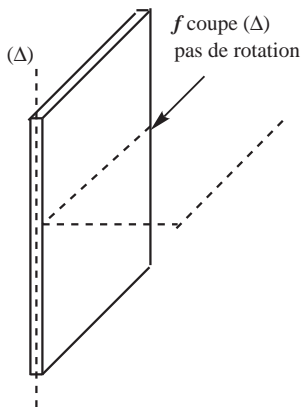
3.1.1 Recherche qualitative des caractéristiques du problème.

Considérons une porte; celle-ci peut tourner autour de l'axe (Δ) défini par ses gonds. Appliquons une force sur la porte, et regardons son effet sur la mise en rotation de celle-ci.

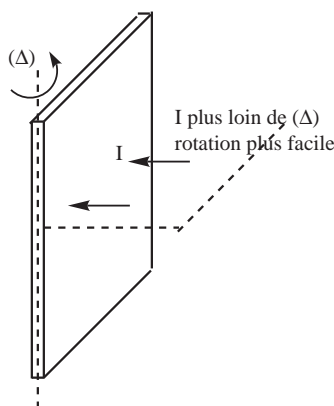
Si la force a sa droite d'application parallèle à l'axe (Δ), elle n'induit pas de rotation de la porte.



Appliquons maintenant la force dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation (Δ). Pour une force donnée appliquée en un point donné, si la droite d'application de la force passe par l'axe, il n'y a pas mise en rotation. Plus on s'éloigne de cette orientation, plus la mise en rotation est facile, c'est-à-dire que la mise en rotation est d'autant plus facile qu'on se rapproche de la situation où la force est appliquée orthogonalement au plan de la porte.



On applique maintenant la force dans un plan perpendiculaire à l'axe, et perpendiculairement au plan de la porte. De façon évidente, plus l'intensité de la force est grande, plus la rotation est facile. En outre, plus le point d'application I est loin de l'axe, plus la mise en rotation est facile.



3.1.2 Moment d'une force par rapport à un axe fixe.

Soit une force \vec{f} quelconque appliquée en un point I, et (Δ) un axe fixe. La force \vec{f} peut toujours se décomposer selon :

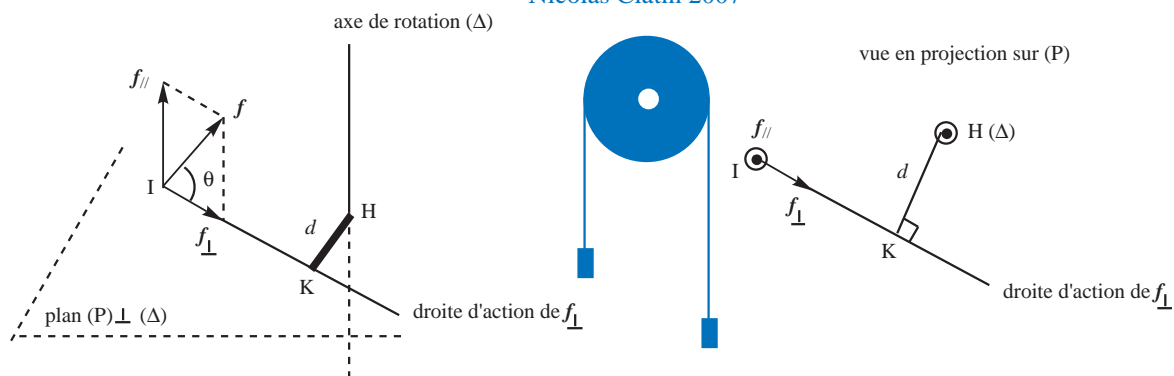
- une composante $\vec{f}_{//}$ parallèle à l'axe (Δ) , qui correspond à la projection de \vec{f} sur (Δ) ,
- une composante \vec{f}_{\perp} dans le plan (P) perpendiculaire à l'axe, et contenant I, c'est-à-dire la projection de \vec{f} sur ce plan (P).

$$\vec{f} = \vec{f}_{//} + \vec{f}_{\perp} \quad (8)$$

D'après l'étude qualitative précédente, la composante parallèle à l'axe $\vec{f}_{//}$ n'induit pas de rotation ; seule la composante \vec{f}_{\perp} importe. L'efficacité de \vec{f} à entraîner une rotation autour de l'axe (Δ) est mesurée par le **moment de \vec{f} par rapport à (Δ)** , dont la valeur numérique est donnée par la formule :

$$\boxed{|\mathcal{M}_{\vec{f}/\Delta}| = d \times \|\vec{f}_{\perp}\|} \quad (9)$$

où d est le **bras de levier**, qui correspond à la plus petite distance entre l'axe de rotation (Δ) et la droite d'action de \vec{f}_{\perp} . Le bras de levier est la longueur du segment reliant le point d'intersection H de (Δ) avec (P) et la projection K de H sur la droite d'action de \vec{f}_{\perp} .



certains droits réservés
ne peut pas être vendu

Le moment d'une force étant le produit de l'intensité d'une force par une longueur (bras de levier), son unité est le N · m.

3.1.3 Algébrisation du moment.

De façon évidente, si on change le sens de la force appliquée sur une porte, on change le sens de rotation de celle-ci. La valeur numérique du moment ne décrit donc pas entièrement le phénomène de rotation. Pour expliciter le sens de rotation induit par la force, on va attribuer à son moment par rapport à l'axe de rotation un signe arbitraire selon la convention suivante.

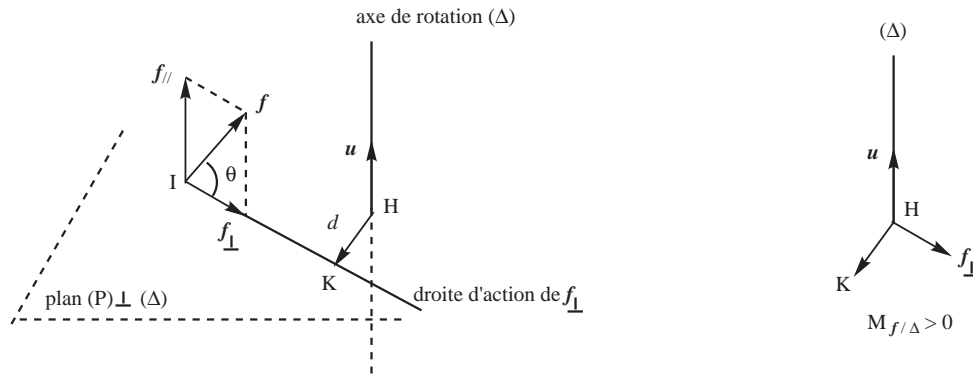
- On oriente l'axe (Δ) arbitrairement par un vecteur \vec{u} .
- Le bras de levier est orienté de l'axe vers la droite d'action de \vec{f}_{\perp} , soit \vec{HK} .
- On porte au point H les vecteurs \vec{u} , \vec{HK} et \vec{f}_{\perp} .

Le signe du moment peut être déterminé par la « règle des trois doigts » :

- le point H est à la base du pouce de la **main droite**,
- le pouce est aligné suivant \vec{HK} ,
- l'index est aligné suivant \vec{f}_{\perp} ,
- on tend alors le majeur du côté de la paume.

Si le majeur pointe comme \vec{u} , le moment est positif $\mathcal{M}_{\vec{f}/\Delta} > 0$; s'il pointe selon $-\vec{u}$, le moment est négatif.

Attention! on doit raisonner avec la main droite exclusivement ; ceux qui raisonnent avec la main gauche doivent inverser la conclusion.



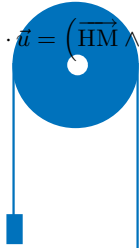
On peut également utiliser la « règle du tire-bouchon » : on tourne de \overrightarrow{HK} à \vec{f}_\perp en supposant qu'on tient un tire-bouchon. Si la rotation entraîne un déplacement du tire-bouchon dans le sens de \vec{u} , le moment est positif, sinon il est négatif.

Remarque (hors programme). Plus généralement, le moment par rapport à un point H d'une force \vec{f} appliquée en un point M, est la grandeur vectorielle définie par :

$$\vec{\mathcal{M}}_{\vec{f}/H} = \overrightarrow{HM} \wedge \vec{f}$$

Si (Δ) est un axe passant par H et orienté par un vecteur unitaire \vec{u} , le moment de la force \vec{f} par rapport à (Δ) vaut :

$$\mathcal{M}_{\vec{f}/\Delta} = \vec{\mathcal{M}}_{\vec{f}/H} \cdot \vec{u} = (\overrightarrow{HM} \wedge \vec{f}) \cdot \vec{u}$$



3.2 Le solide au repos.

Une condition nécessaire pour que le solide soit au repos est qu'il ne soit en rotation autour d'aucun axe. On admet ici que la rotation autour d'un axe résulte de la somme des moments par rapport à cet axe de toutes les forces extérieures appliquées. La condition **nécessaire** est alors que le moment total soit nul par rapport à tout axe de rotation possible :

certains droits réservés
ne peut pas être vendu

$$\forall(\Delta), \sum \mathcal{M}_{\vec{f}/\Delta} = 0 \quad (10)$$

Cette condition n'est pas suffisante, car un solide en rotation uniforme, c'est-à-dire à vitesse angulaire constante, est soumis à un moment total nul. Si on s'assure qu'à un instant donné, il n'y a pas de rotation, alors la condition précédente devient nécessaire et suffisante.

En conclusion, pour qu'un solide soit au repos, il faut **nécessairement** :

| | |
|----------------------------|--|
| pas de translation globale | : $\sum \vec{f}_{\text{ext}} = \vec{0}$ |
| aucune rotation | : $\forall(\Delta), \sum \mathcal{M}_{\vec{f}/\Delta} = 0$ |

Si de plus à un instant donné, la vitesse du centre de gravité est nulle et aucune rotation n'a lieu, alors la double condition précédente devient nécessaire et suffisante.