

# MÉCANIQUE

## chapitre 3

### Le fluide au repos Statique des fluides

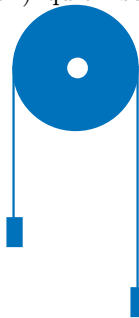
Bien que constitué de particules en constante agitation, un fluide peut être au repos lorsqu'il n'est pas animé d'un mouvement d'ensemble. Les lois de la statique du solide peuvent alors être généralisées aux fluides. Cependant, par leur nature même, les fluides ont un comportement dynamique différents des solides (mouvements tourbillonnaires, comportement chaotique, etc). La dynamique des fluides sera abordée en deuxième année.

Dans l'étude des fluides, on doit considérer un paramètre très important : la pression. Son évolution au sein du fluide conditionne les propriétés de celui-ci et les interactions qu'il exerce sur le monde extérieur.

La statique des fluides a de nombreuses applications. Elle permet l'étude des masses liquides ou gazeuses tant en biologie (fluides internes, respiration) qu'en sciences de la Terre (océans, noyau terrestre, atmosphère).

Plan du chapitre.

1. Les fluides
  - 1.1 Classification des états de la matière
  - 1.2 Condition d'étude des fluides
  - 1.3 Repos d'un fluide
2. Notion de pression dans un fluide ; forces pressantes
  - 2.1 Pression sur une surface élémentaire
  - 2.2 Forces pressantes exercées par un fluide sur une surface
  - 2.3 La poussée d'Archimède
3. Équilibre d'une particule de fluide dans le champ de pesanteur
  - 3.1 Équation locale de la statique des fluides
  - 3.2 Surfaces isobares
  - 3.3 Évolution de la pression au sein d'un fluide
4. Cas d'un liquide homogène incompressible
  - 4.1 Hypothèses de l'étude
  - 4.2 Intégration de l'équation locale
  - 4.3 Continuité de la pression à une interface
  - 4.4 Applications
5. Cas d'un gaz homogène compressible ; modèle de l'atmosphère
  - 5.1 Modèle de l'atmosphère isotherme
  - 5.2 Intégration de l'équation locale
  - 5.3 La pression d'un gaz
  - 5.4 Interprétation microscopique de la loi de pression



certains droits réservés  
ne peut pas être vendu

# 1 Les fluides.

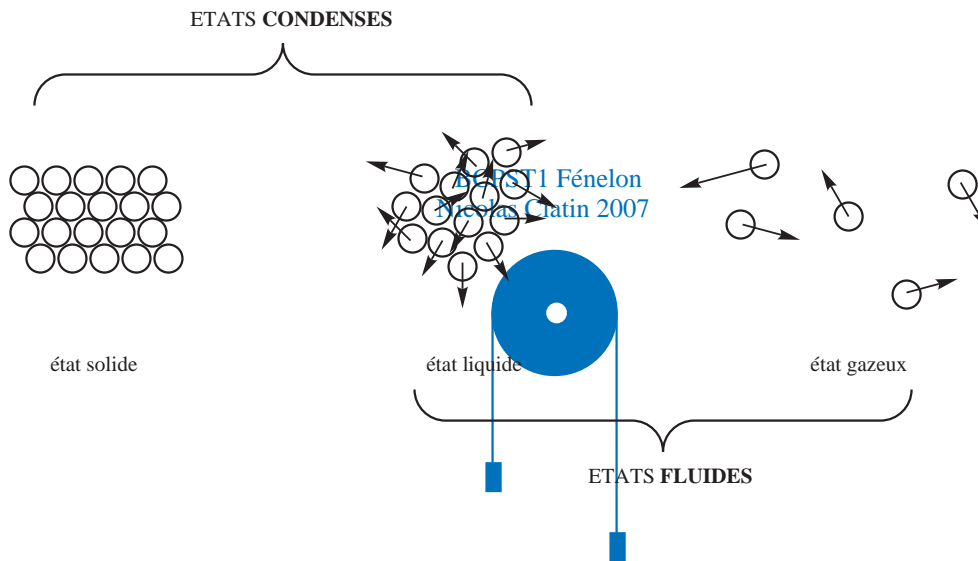
## 1.1 Classification des états de la matière.

Dans les conditions régnant à la surface de la Terre, la matière peut se trouver sous trois états physiques différents : solide, liquide et gazeux. Deux critères distinguent ces trois états :

- la distance moyenne entre les molécules (ou ions ou atomes),
- le mouvement des molécules les unes par rapport aux autres.

Les **états condensés** (solide et liquide) se caractérisent par une distance entre les centres de deux molécules voisines de l'ordre de la taille de ces molécules. En d'autres termes, les molécules sont en contact les unes avec les autres dans les états condensés. Dans l'état gazeux, au contraire, la distance entre molécules est de l'ordre de 1000 fois la taille d'une molécule, à la pression ambiante.

Dans les **états fluides** (liquide et gaz), les molécules sont en mouvement permanent les unes par rapport aux autres. Au contraire, dans l'état solide, elles sont fixes en moyenne les unes par rapport aux autres.

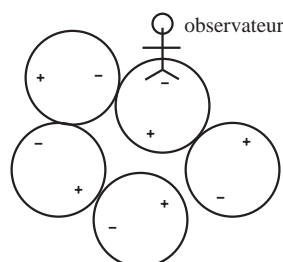


## 1.2 Condition d'étude des fluides.

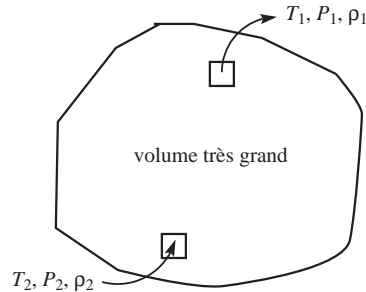
Dans les états fluides, toutes les molécules sont en mouvement permanent les unes par rapport aux autres. Il est alors impossible de les étudier toutes en même temps. En effet, dans 1 g de matière, il y a typiquement de l'ordre de  $10^{23}$  molécules ; aucun ordinateur n'est capable de calculer les positions et les vitesses d'un tel ensemble.

En mécanique des fluides, on est obligé de raisonner sur une **particule de fluide**, un ensemble qui contient un très grand nombre de molécules constitutives de ce fluide. Les résultats qu'on obtient sont alors des moyennes sur ce grand nombre de molécules. Quelle doit être la taille de cette particule de fluide pour pouvoir raisonner ?

Si on considère un fluide à l'échelle d'une molécule, la matière est discontinue. En effet, il y a des vides entre les molécules, et celles-ci sont orientées de diverses manières. Un observateur qui serait lié à une molécule percevrait des propriétés (par exemple la polarisation comme sur le schéma ci-dessous) et donc des comportements différents dans toutes les directions autour de lui et à des instants successifs. Si au contraire, on raisonne sur une particule de fluide « assez grande », la matière paraît continue. Il faut donc se placer à une échelle nettement supérieure à la taille d'une molécule constitutive du fluide.



D'autre part, il ne faut pas que la particule de fluide soit trop grande. En effet, si on veut qu'elle soit l'unité de base d'étude de ce fluide, il faut être certain que les propriétés du fluide soient les mêmes en tout point de la particule, afin que la moyenne de cette propriété sur toute la particule reflète bien l'état des molécules qui la constitue. Si la particule de fluide est trop grande, les propriétés du fluide ne seront pas les mêmes en chacun de ses points.



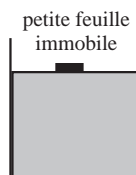
Pour s'en convaincre, il suffit d'exagérer le raisonnement : si on prend l'Océan Pacifique entier comme particule de fluide, on peut en calculer la température moyenne, mais celle-ci ne reflète aucune réalité, car cela revient à décrire que la température est la même près de l'Antarctique et à Hawaï. La particule de fluide est trop importante pour pouvoir faire des raisonnements utiles.

BCPST1 Fénelon  
Nicolas Clatin 2007

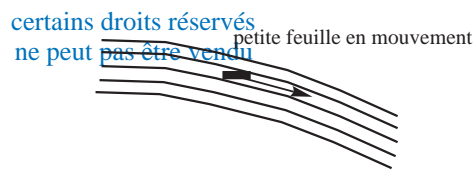
En définitive, la taille d'une particule de fluide doit être intermédiaire entre l'échelle atomique et l'échelle macroscopique. Elle est d'échelle **mésoscopique**, typiquement de l'ordre du  $\mu\text{m}^3$ .

### 1.3 Repos d'un fluide.

On peut se demander ce que signifie la notion de repos dans un fluide, alors que les molécules y sont par définition en mouvement perpétuel les unes par rapport aux autres. Le repos doit être entendu à l'échelle macroscopique : un fluide est dit au repos si les molécules n'y sont pas animées d'un mouvement d'ensemble, ni de translation ni de rotation.



fluide au repos



fluide en mouvement

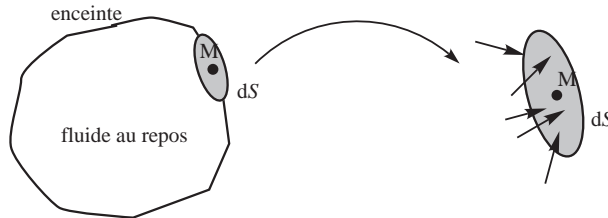
Par exemple, l'eau d'un verre est au repos, mais pas l'eau d'une rivière. Pour s'en convaincre, il suffit de déposer un morceau de feuille à la surface de l'eau dans chaque cas : dans le verre, la feuille reste immobile, alors que dans la rivière, elle en suit le cours. En terme de particule de fluide, le repos implique que, pour n'importe quelle particule de fluide, son centre de masse est immobile :  $\vec{v}_G = \vec{0}$ .

En première année, on ne considère que les fluides au repos, c'est la statique des fluides. Les fluides en mouvement seront étudiés en deuxième année (dynamique des fluides).

## 2 Notion de pression dans un fluide ; forces pressantes.

### 2.1 Pression sur une surface élémentaire.

Considérons un fluide au repos entouré d'une enceinte. On considère une portion très petite de la surface de l'enceinte, notée  $dS$  et appelée **surface élémentaire** ou **élément de surface**, autour d'un point  $M$ . Cette surface est du même ordre de grandeur que la particule de fluide définie à la section précédente, et elle est suffisamment petite pour qu'on puisse la considérer comme plane.



La surface  $dS$  est soumise à un très grand nombre de chocs de la part des molécules de fluide qui se trouvent à proximité de la surface, et qui sont en mouvement incessant. Ces molécules arrivent sur la surface de toutes les directions avec des vitesses variables, et rebondissent. L'ensemble de ces chocs est impossible à étudier, étant donné le nombre de molécules mises en jeu. L'interaction globale entre le fluide et la surface est modélisée par une force unique, appelée la **force pressante**. On montre que la force pressante élémentaire  $d\vec{f}_p$  exercée par le fluide sur l'élément de surface  $dS$  s'exprime sous la forme :

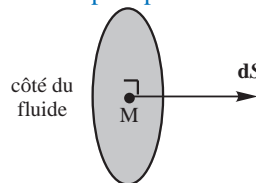
$$d\vec{f}_p = P_{(M)} d\vec{S} \quad (1)$$

où  $P_{(M)}$  est la **pression du fluide** au point  $M$ , exprimée en pascal Pa, et

$d\vec{S}$  est le vecteur tel que :

- sa norme est égale à l'aire de la surface élémentaire  $dS$ ,
- sa direction est normale (orthogonale) à la surface,
- son sens est vers l'extérieur de l'enceinte, du fluide vers la surface.

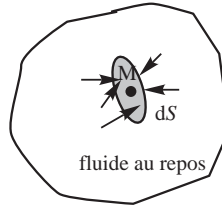
certains droits réservés  
ne peut pas être vendu



La force pressante  $d\vec{f}_p$  exercée par le fluide sur la surface est une **force surfacique**. La pression s'interprète alors comme une densité surfacique de force. Telle qu'on l'a définie, la pression est une **grandeur locale**, dont la valeur dépend du point  $M$  considéré sur la surface.

Lorsque le fluide est au repos,  $d\vec{f}_p$  est normal à la surface. En revanche, s'il est en mouvement, il apparaît une composante tangentielle d'autant plus importante que la viscosité du fluide est grande. Cette composante tangentielle est responsable de la mise en mouvement d'un fluide par déplacement des parois du récipient.

La pression a été définie au niveau d'une surface réelle appartenant à l'enceinte contenant le fluide. En réalité, la pression n'est pas liée à l'existence d'une surface matérielle. En effet, au sein d'un fluide, il y a des mouvements de molécules qui induisent des chocs avec les molécules voisines. Si on plaçait une surface matérielle  $dS$  à ce niveau, elle subirait ces chocs. En un point  $M$  quelconque du fluide, on peut donc définir la pression à partir des forces pressantes que le fluide exercerait sur une surface élémentaire qu'on placerait en  $M$ .



Si le fluide est en équilibre, la petite surface considérée au sein du fluide est en équilibre. La force pressante totale qui s'exerce sur elle doit donc être nulle. En effet, la surface  $dS$  subit des chocs de la part des molécules de fluide qui sont à sa gauche, et qui induisent une force pressante  $d\vec{f}_p = P d\vec{S}$  vers la droite, et des chocs de la part des molécules de fluide qui sont à sa droite, et qui induisent une force pressante exactement opposée :  $d\vec{f}_p = P(-d\vec{S})$ .

## 2.2 Forces pressantes exercées par un fluide sur une surface.

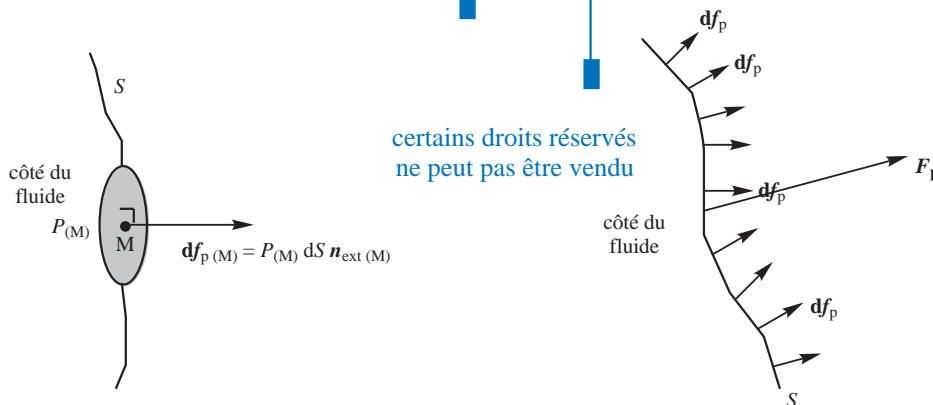
### 2.2.1 Principe du calcul.

On s'intéresse maintenant à une surface macroscopique  $S$ , en contact avec un fluide ; on cherche la force pressante exercée par le fluide sur cette surface. Il est toujours possible de la découper en une juxtaposition d'éléments de surface  $dS$  ; chacun d'entre eux est soumis à une force pressante élémentaire  $d\vec{f}_p$ . La force pressante totale s'exerçant sur la surface  $S$  est la somme de toutes les forces pressantes élémentaires exercées sur toutes les surfaces élémentaires constituant  $S$ .

La force pressante exercée par un fluide sur un élément de surface  $dS$  centré sur le point  $M$  est de la forme :

$$d\vec{f}_p = P_{(M)} d\vec{S} = P_{(M)} dS \vec{n}_{\text{ext}} \quad (2)$$

où  $\vec{n}_{\text{ext}}$  est le vecteur unitaire normal à la surface et dirigé vers l'extérieur par rapport au fluide responsable de la force pressante.



Si les éléments de surface sont assez petits, la somme revient à une intégrale double sur la surface totale ; la force pressante totale s'exerçant sur  $S$  est donc :

$$\vec{F}_p = \iint_S P_{(M)} d\vec{S}_{(M)} = \iint_S P_{(M)} dS_{(M)} \vec{n}_{\text{ext}(M)} \quad (3)$$

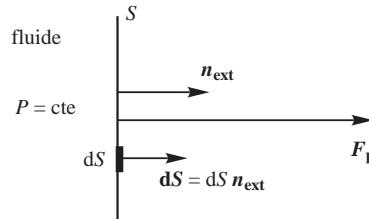
Dans le cas le plus général, la pression dépend du point  $M$ , ainsi que le vecteur  $\vec{n}_{\text{ext}}$  et l'élément de surface. Afin de pouvoir faire l'intégration, il faut connaître la loi donnant la pression en chaque point, ainsi que l'orientation de la surface en chaque point.

### 2.2.2 Cas d'une surface plane.

Dans le cas particulier où la surface est plane, le vecteur  $\vec{n}_{\text{ext}}$  est le même en tout point. On peut donc le sortir de l'intégrale. La force pressante sur la surface totale est alors normale à la surface :

$$\vec{F}_p = \vec{n}_{\text{ext}} \iint_S P_{(M)} dS_{(M)} \quad (4)$$

Considérons le cas très particulier d'une surface plane au niveau de laquelle la pression est uniforme, c'est-à-dire que la pression est la même en chacun des points de la surface :  $\forall M, P_{(M)} = P$ .



La pression est une constante pour l'intégration sur  $S$ , donc on peut la sortir de l'intégrale :

$$\vec{F}_p = P \vec{n}_{\text{ext}} \iint_S dS_{(M)} = P S \vec{n}_{\text{ext}} \quad (5)$$

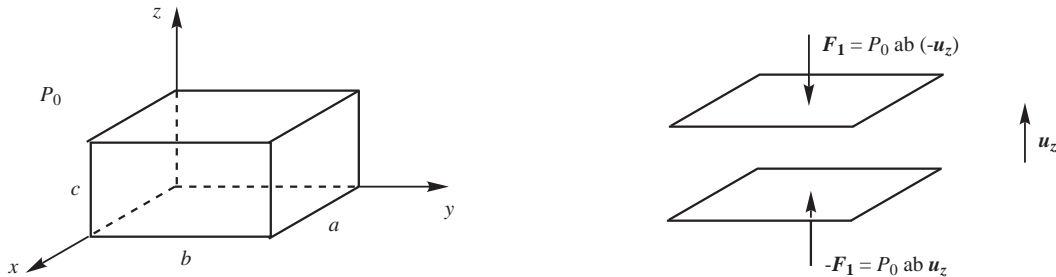
En conclusion, pour une **surface plane**  $S$  soumise à une **pression uniforme**  $P$ , la force pressante exercée par le fluide sur cette surface est reliée à la pression et à la surface par les relations :

$$\vec{F}_p = P S \vec{n}_{\text{ext}} \Rightarrow P = \frac{\|\vec{F}_p\|}{S} \quad (6)$$

Comme on le verra par la suite, la pression peut être supposée uniforme dans le cas d'une surface pas trop étendue et au contact d'un gaz ; la pression est alors celle du gaz  $P_{\text{gaz}}$ . Dans le cas d'un liquide, même peu profond, la pression varie vite avec la profondeur, selon la loi donnée par l'équation (28). Il n'est donc pas possible de la considérer constante, et le calcul est plus compliqué.

### 2.2.3 Cas d'une surface fermée soumise à une pression uniforme.

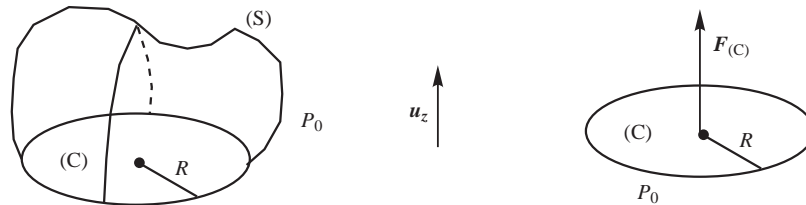
Considérons une brique rectangulaire, immergée dans un fluide au sein duquel règne une pression uniforme  $P_0$ . Il est évident que les forces pressantes exercées sur deux faces en vis-à-vis se compensent, puisque la pression est la même, que les surfaces sont les mêmes et que les forces sont dirigées en sens inverse.



On en déduit que sur la surface constituée des 6 faces, la force pressante totale est nulle. On admet que ce résultat est vrai quelle que soit la forme de la surface. Autrement dit, la force pressante globale exercée par un fluide de **pression uniforme**  $P_0$  sur une **surface fermée** est nulle :

$$\vec{F}_p = \iint_{S \text{ fermée}} P_0 d\vec{S} = \vec{0} \quad (7)$$

Ce résultat peut être utilisé dans certains cas pour calculer la pression exercée sur une surface biscornue. Prenons l'exemple d'une surface complexe (S) prenant appui sur une surface plane circulaire (C) de rayon R, plongée dans un fluide de pression uniforme P<sub>0</sub>. On cherche à déterminer la force pressante totale exercée sur la surface biscornue (S).



La surface (S ∪ C) est une surface fermée, et la pression du fluide y est uniforme. La force pressante totale exercée par le fluide sur cette surface est donc nulle :

BCPST1 Fénelon  
Nicolas Clatin 2007

$$\iint_{S \cup C} P_0 d\vec{S} = \vec{0} \quad (8)$$

La force pressante totale est bien sûr la somme des forces pressantes exercées sur chacune des deux parties. La relation précédente s'écrit donc :

$$\iint_S P_0 d\vec{S} + \iint_C P_0 d\vec{S} = \vec{0} \Rightarrow \iint_S P_0 d\vec{S} = - \iint_C P_0 d\vec{S} \Rightarrow \vec{F}_S = -\vec{F}_C \quad (9)$$

où  $\vec{F}_S$  est la force pressante exercée sur (S), qu'on cherche, et  $\vec{F}_C$  la force pressante exercée sur (C). Celle-ci est facilement calculable puisque (C) est une surface plane soumise à une pression uniforme. D'après (5), on a donc :

certains droits réservés  
ne peut pas être vendu

$$\vec{F}_C = P_0 \pi R^2 \vec{u}_z \quad (10)$$

puisque la surface est circulaire de rayon R et orthogonale à  $\vec{u}_z$ . On en déduit que la force pressante exercée par le fluide sur la partie biscornue (S) est :

$$\vec{F}_S = -P_0 \pi R^2 \vec{u}_z \quad (11)$$

## 2.3 La poussée d'Archimède.

### 2.3.1 Définition.

On considère un corps plongé dans un fluide. Sa surface de contact avec le fluide est une surface fermée. Si la pression est uniforme au sein du fluide, la résultante des forces pressantes exercées par le fluide est nulle, d'après le paragraphe précédent.

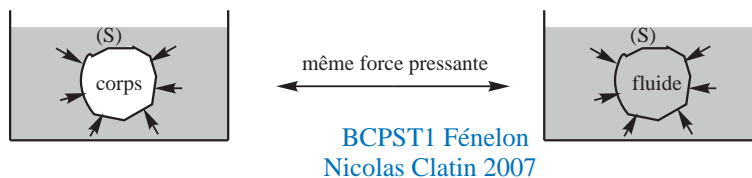


Si au contraire la pression au sein du fluide n'est pas uniforme, la résultante des forces pressantes n'est pas nulle. On appelle **poussée d'Archimède** la **résultante des forces pressantes** exercée par un fluide **en équilibre dans le champ de pesanteur** sur un corps **entièrement immergé** dans ce fluide.

En pratique, la poussée d'Archimède est souvent, mais pas toujours, supposée nulle lorsque le fluide est un gaz et le corps assez petit ; en effet, on a vu que dans ce cas, la pression pouvait être considérée uniforme dans le fluide. Cependant, dans certaines expériences très précises, ou lorsque la poussée d'Archimède est la seule force responsable d'un phénomène, cette approximation n'est plus acceptable. Dans les liquides, il est plus rare que la poussée d'Archimède soit négligeable, mais cela peut arriver.

### 2.3.2 Calcul de la poussée d'Archimède.

La force pressante exercée par le fluide sur le corps immergé ne dépend pas de la composition de ce corps, mais uniquement de la surface de contact (S). Elle serait donc la même si la surface (S) était remplie du même fluide que celui dans lequel le corps baigne.



La poussée d'Archimède exercée par le fluide extérieur à (S) sur le contenu de (S) est donc la même dans les deux cas. Or, dans le cas où il y a le même fluide de part et d'autre de (S), l'ensemble est à l'équilibre, donc le fluide inclus dans (S) est à l'équilibre. Le fluide intérieur à (S) est soumis à deux forces :

- son poids  $M_F \vec{g}$ , où  $M_F$  est la masse de fluide à l'intérieur de (S),
- la poussée d'Archimède  $\vec{P}_A$ .

Puisque le fluide à l'intérieur de (S) est à l'équilibre, on a :

$$M_F \vec{g} + \vec{P}_A = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{P}_A = -M_F \vec{g} \quad (12)$$

La **poussée d'Archimède** exercée par un fluide sur un corps **entièrement immergé** est l'**opposée du poids du fluide déplacé** par ce corps.

Si par exemple le corps immergé est une sphère de rayon  $R$ , et en appelant  $\rho$  la masse volumique du fluide qui baigne le corps, la masse de fluide déplacé est :

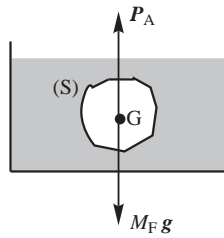
$$M_F = \frac{4}{3} \pi R^3 \times \rho \quad (13)$$

et la poussée d'Archimède subie par le corps immergé est :

$$\vec{P}_A = -\frac{4}{3} \pi R^3 \rho \vec{g} \quad (14)$$

Le point d'application de la poussée d'Archimède est le centre de masse G du fluide déplacé, c'est-à-dire le point d'application du poids du fluide déplacé. Ce point est *a priori* différent du centre de masse de l'objet immergé, sauf si celui-ci est homogène (même densité en chaque point).





### 2.3.3 Généralisation.

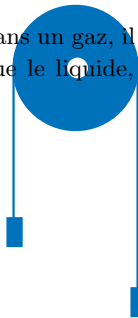
Dans le cas d'un objet immergé dans un ensemble de plusieurs fluides, la poussée d'Archimède est l'opposée du poids des fluides déplacés, et son point d'application est le centre de masse de l'ensemble des fluides déplacés. Par exemple un objet flottant à la surface de l'eau, donc plongé pour partie dans l'eau et pour partie dans l'air, subit la poussée d'Archimède :

$$\vec{P}_A = -(M_{\text{air}} + M_{\text{eau}}) \vec{g} \quad (15)$$

où  $M_{\text{air}}$  et  $M_{\text{eau}}$  sont les masses d'air et d'eau déplacés. C'est la force pressante subie par Archimède dans sa baignoire.

BCPST1 Éléments  
Nicolas Clatin 2007

Dans le cas où le corps est plongé dans un liquide et dans un gaz, il est fréquent qu'on puisse négliger la contribution du gaz. En effet, celui-ci étant beaucoup moins dense que le liquide, la masse de gaz déplacé est souvent très petite devant la masse de liquide déplacé.

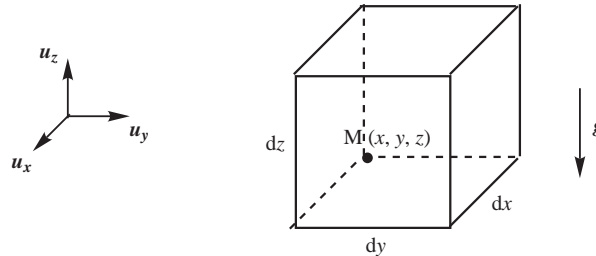


certains droits réservés  
ne peut pas être vendu

### 3 Équilibre d'une particule de fluide dans le champ de pesanteur.

#### 3.1 Équation locale de la statique des fluides.

On considère une particule de fluide au repos dans le champ de pesanteur terrestre, de forme cubique dont les arêtes ont pour longueur  $dx$ ,  $dy$  et  $dz$ . Le volume de la particule de fluide est :  $d\tau = dx \cdot dy \cdot dz$ . La masse volumique du fluide en M est notée  $\rho_{(M)}$  et le champ de pesanteur terrestre en M est  $\vec{g}_{(M)}$ .



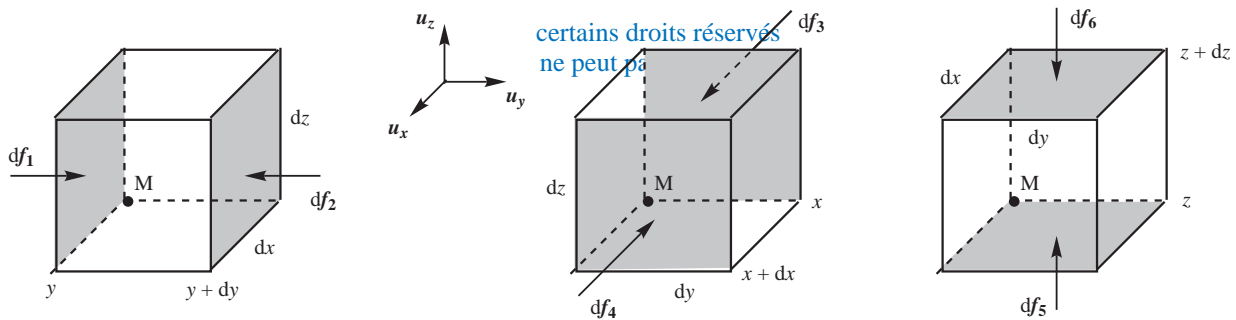
La particule de fluide est au repos, donc elle est soumise à une force globale nulle :  $\sum \vec{F} = \vec{0}$ . Les forces en présence qui s'exercent toujours sont :

- le poids (force volumique) :  $d\vec{f}_v = \rho_{(M)} \vec{g}_{(M)} d\tau$
- les forces pressantes de la part du fluide entourant  $d\tau$  (forces surfaciques).

Dans des cas plus complexes, il peut y avoir d'autres forces volumiques (force de Coulomb si le fluide est chargé, force magnétique s'il comporte des aimants, etc), et d'autres forces surfaciques (forces de frottement...).

Évaluons les forces pressantes exercées sur la particule. Sur chacune de ses faces, il existe une force pressante élémentaire normale à la face et dirigée vers l'intérieur (c'est le fluide extérieur qui exerce une force sur la particule). Raisononnons sur les couples de faces opposées. Sur les faces de gauche et de droite, aux ordonnées  $y$  et  $y + dy$ , de surface  $dx \cdot dz$ , les forces pressantes sont :

- $d\vec{f}_1 = P_{(y)} dx dz \vec{u}_y$ ,
- $d\vec{f}_2 = P_{(y+dy)} dx dz (-\vec{u}_y)$ .



De même, sur les faces arrière et avant, aux abscisses  $x$  et  $x + dx$ , de surface  $dy \cdot dz$ , les forces pressantes sont :

- $d\vec{f}_3 = P_{(x)} dy dz \vec{u}_x$ ,
- $d\vec{f}_4 = P_{(x+dx)} dy dz (-\vec{u}_x)$ .

Enfin, sur les faces inférieure et supérieure, aux cotes  $z$  et  $z + dz$ , de surface  $dx \cdot dy$ , les forces pressantes sont :

- $d\vec{f}_5 = P_{(z)} dx dy \vec{u}_z$ ,
- $d\vec{f}_6 = P_{(z+dz)} dx dy (-\vec{u}_z)$ .

La force surfacique élémentaire globale subie par la particule de fluide est  $d\vec{f}_s = d\vec{f}_1 + d\vec{f}_2 + \dots + d\vec{f}_6$ . Comme la particule est au repos, on a nécessairement :

$$d\vec{f}_v + d\vec{f}_s = \vec{0} \Rightarrow \rho_{(M)} \vec{g}_{(M)} d\tau + d\vec{f}_s = \vec{0} \quad (16)$$

Projetons sur les trois axes, sachant que le poids est uniquement suivant la verticale :

$$\begin{cases} P_{(x)} dy dz - P_{(x+dx)} dy dz = 0 \\ P_{(y)} dx dz - P_{(y+dy)} dx dz = 0 \\ P_{(z)} dx dy - P_{(z+dz)} dx dy - \rho_{(M)} g_{(M)} dx dy dz = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} P_{(x)} = P_{(x+dx)} \\ P_{(y)} = P_{(y+dy)} \\ (P_{(z+dz)} - P_{(z)}) + \rho_{(M)} g_{(M)} dz = 0 \end{cases} \quad (17)$$

Les deux premières équations du système montrent que la pression ne dépend ni de  $x$  ni de  $y$ , autrement dit, pour une particule de fluide **au repos** dans le **seul champ de pesanteur**, la **pression ne dépend que de  $z$** . Ce résultat est attendu dans la mesure où la seule contrainte à laquelle le système est soumis, à savoir le poids, est selon la verticale; il n'y a donc aucune raison que les propriétés du fluide varient selon  $x$  ou  $y$ . Corrolairement, on peut s'attendre à ce que la masse volumique  $\rho$  soit une fonction de  $z$ .

On s'intéresse maintenant à la dernière équation du système (17). D'après ce qu'on a dit, les propriétés du fluide dépendent seulement de  $z$ , et il en est de même du champ de pesanteur; on peut donc récrire cette équation sous la forme :

$$P_{(z+dz)} - P_{(z)} = -\rho_{(z)} g_{(z)} dz \Rightarrow \frac{P_{(z+dz)} - P_{(z)}}{dz} = -\rho_{(z)} g_{(z)} \quad (18)$$

BCPST1 Fénelon  
Nicolas Clatin 2007  
 Pour se ramener à des définitions connues en mathématiques, il suffit de voir que la pression  $P$  est une fonction de  $z$ , et que la grandeur  $dz$  est très petite. L'expression de gauche dans (18) est donc de la forme :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (19)$$


dans laquelle  $f$  joue le rôle de  $P$ ,  $x$  celui de  $z$  et  $h$  celui de  $dz$ . Le rapport précédent est par définition la dérivée de  $f$  au point  $x$  :  $f'(x)$ . On en déduit que (18) revient à :

$$\frac{dP_{(z)}}{dz} = -\rho_{(z)} g_{(z)} \quad (20)$$

qui s'écrit souvent sous la forme suivante, connue sous le nom d'**équation locale de la statique des fluides**, valable pour un **fluide au repos dans le seul champ de pesanteur** :  
certains droits réservés  
ne peut pas être vendu

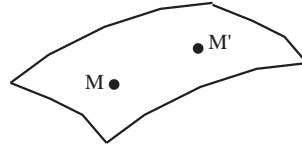
$$\boxed{dP_{(z)} = -\rho_{(z)} g_{(z)} dz} \quad (21)$$

Cette équation est bien *locale* car elle a été établie pour une particule de fluide, c'est-à-dire pour une portion très petite du fluide, et non pour le système dans son ensemble.

Attention au signe! Il dépend de l'orientation choisie pour l'axe vertical. Pour une orientation de  $z$  vers le haut, comme dans le raisonnement qu'on a fait, il apparaît un signe négatif. Il est aisé de vérifier le signe qualitativement, en se rappelant que dans un système, la pression diminue lorsqu'on s'élève. Si l'axe vertical est orienté vers le haut, une élévation correspond à une augmentation de  $z$ , soit  $dz > 0$ ; on a alors  $dP < 0$  dans (21), ce qui correspond bien à une diminution de la pression  $P$ .

### 3.2 Surfaces isobares.

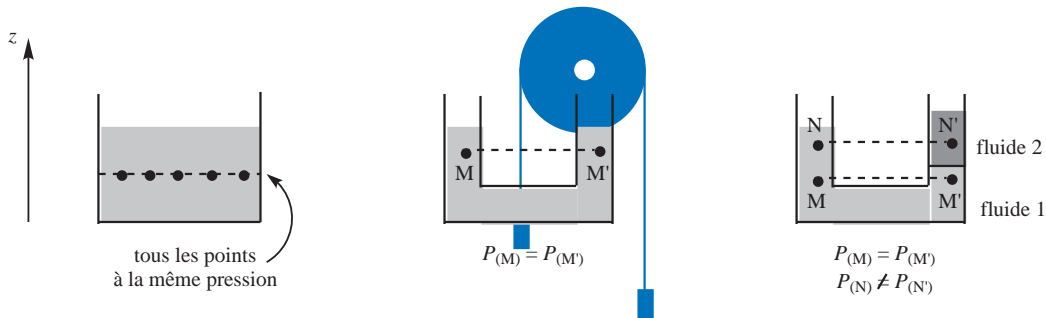
Une **surface isobare** est telle que la pression soit identique en chacun de ses points. Considérons deux points M et M' très voisins dans un même fluide, et soit  $dP_{M \rightarrow M'}$  la variation de pression quand on va de M à M'. Cette variation de pression est très petite car les deux points sont très voisins.



Si M et M' sont sur une surface isobare, alors la variation de pression quand on va de l'un à l'autre est nulle par définition. Dans le cas d'un fluide au repos dans le seul champ de pesanteur, l'équation locale de la statique des fluides implique alors :

$$dP_{M \rightarrow M'} = 0 \Rightarrow \rho g dz_{M \rightarrow M'} = 0 \Rightarrow dz_{M \rightarrow M'} = 0 \quad (22)$$

ce qui revient à dire que M et M' sont à la même altitude. Dans un fluide au repos dans le seul champ de pesanteur, les **surfaces isobares** sont des **plans horizontaux**. En d'autres termes, en deux points à la même altitude dans un même fluide, la pression est la même, c'est le cas des points sur une horizontale dans les dispositifs à gauche et au centre ci-dessous.



Dans le dispositif à droite, qui comporte deux liquides différents, il y a égalité des pressions sur une horizontale au sein d'un même fluide ( $P_{(M)} = P_{(M')}$ ), mais pas dans deux fluides différents ( $P_{(N)} \neq P_{(N')}$ ).

### 3.3 Évolution de la pression au sein d'un fluide.

L'équation (21) est locale, c'est-à-dire établie pour une particule de fluide très petite de volume  $d\tau$ . Cependant, on souhaite la plupart du temps, connaître la loi de pression à l'échelle du fluide entier, c'est-à-dire à l'échelle macroscopique. L'équation locale :

$$dP_{(z)} = -\rho_{(z)} g_{(z)} dz \quad (23)$$

relie la grandeur qu'on veut connaître  $P$ , à la variable  $z$  dont dépend cette grandeur, mais sous forme différentielle. Il faut donc l'intégrer :

$$\int dP_{(z)} = - \int \rho_{(z)} g_{(z)} dz \quad (24)$$

Cette intégration n'est possible que si on connaît la loi d'évolution de la masse volumique  $\rho_{(z)}$  et du champ de pesanteur  $g_{(z)}$  en fonction de l'altitude  $z$ . Deux cas sont à considérer : celui des liquides et celui des gaz. Moyennant des hypothèses sur  $\rho_{(z)}$  et  $g_{(z)}$ , on peut déterminer la loi de pression dans ces deux types de fluides. On étudiera d'abord le cas classique d'un liquide supposé incompressible (masse volumique constante), et celui, également classique, de l'atmosphère isotherme (température constante).

## 4 Cas d'un liquide homogène incompressible.

### 4.1 Hypothèses de l'étude.

#### 4.1.1 La masse volumique est supposée constante.

Lors de l'étude d'un liquide, on fait usuellement l'hypothèse que celui-ci est incompressible, c'est-à-dire que son volume est invariable pour une masse donnée de matière, autrement dit que sa masse volumique est constante :  $\rho = \text{cte}$ .

À quelle(s) condition(s) cette hypothèse est-elle raisonnable ? L'équation locale de la statique des fluides relie la pression  $P$  à l'altitude  $z$  ; il faut donc discuter de l'invariance supposée de  $\rho$  avec  $z$ . Les facteurs à prendre en compte sont la température  $T$  et la pression  $P$ .

Pour les liquides usuels, la masse volumique diminue avec la température, mais ce n'est pas une loi générale. Dans tous les cas, néanmoins,  $\rho$  varie avec  $T$ , mais assez lentement. L'hypothèse d'un liquide incompressible suppose donc que la température au sein de ce liquide soit assez homogène.

Par ailleurs, la masse volumique augmente avec la pression : plus celle-ci est élevée, plus les molécules sont comprimées donc proches les unes des autres. À nouveau, cette variation est relativement lente, car les molécules étant déjà très proches dans un liquide à pression ambiante, les rapprocher sensiblement les unes des autres nécessite d'exercer une pression très importante. Tant que les variations de pression restent raisonnables, l'hypothèse du liquide incompressible l'est.

L'étude d'un verre d'eau, d'un lac peu profond ou du plateau continental d'un océan (profondeur inférieure à 200 m environ), est tout à fait faisable dans le cadre de l'hypothèse d'un liquide incompressible : les variations de pression et de température sont assez faibles pour ne pas influencer sur  $\rho$ .

En revanche, l'étude de l'Océan Pacifique au niveau de la Fosse des Mariannes (profondeur de 11 km) devient problématique. La température continue d'avoir une variation faible (environ 20 °C du fond à la surface), mais la variation de pression est très importante. Les limites de l'hypothèse sont encore plus évidentes si on étudie le noyau liquide de la Terre, même en supposant qu'il soit au repos, ce qui n'est pas le cas.

D'autre part, un liquide est homogène si sa composition chimique est la même en tout point. À nouveau, c'est le cas d'un verre d'eau, d'un lac ou d'un océan peu profond. Dans le cas d'un océan profond, la salinité peut varier en fonction de la profondeur, et donc faire évoluer la masse volumique.

#### 4.1.2 Le champ de pesanteur est supposé constant.

Aucun système liquide à la surface de la Terre n'a une profondeur qui excède environ 11 km. Or un calcul simple de la variation du champ de pesanteur terrestre montre que celui-ci varie de moins de 1% tant que la variation d'altitude reste inférieure à 32 km. On pourra donc faire l'approximation que  $g = \text{cte}$  dans un système liquide.

Évidemment, l'étude du noyau liquide au centre de la Terre, dont l'épaisseur est nettement supérieure à 32 km ne pourra pas se faire avec l'hypothèse d'un champ de pesanteur constant.

### 4.2 Intégration de l'équation locale.

Dans l'hypothèse du liquide incompressible dans un champ de pesanteur uniforme, l'équation locale de la statique des fluides devient :

$$dP_{(z)} = -\rho g dz \quad (25)$$

avec  $\rho$  et  $g$  constants. L'intégration de cette équation peut se faire de deux façons également correctes.

Première méthode : on prend la primitive (méthode « des matheux »). La pression est une fonction de  $z$ , et l'équation (25) fait apparaître que la dérivée de cette fonction est une constante :

$$\frac{dP_{(z)}}{dz} = P'_{(z)} = -\rho g \Rightarrow P_{(z)} = -\rho g z + k \quad (26)$$

où  $k$  est une constante. Celle-ci est déterminée à l'aide d'une condition particulière : si  $P_{(z_0)}$  est la pression à l'altitude  $z_0$ , alors, en reportant dans (26) :

$$P_{(z_0)} = -\rho g z_0 + k \Rightarrow k = P_{(z_0)} + \rho g z_0 \quad (27)$$

On en déduit finalement que dans un **liquide homogène incompressible au repos dans le champ de pesanteur terrestre supposé uniforme**, la pression varie avec l'altitude selon une loi affine :

$$P_{(z)} = P_{(z_0)} - \rho g (z - z_0) \quad (28)$$

Seconde méthode : on intègre la relation entre deux bornes (méthode « des physiciens »). Les deux membres de (25) étant égaux, leurs intégrales entre les mêmes bornes sont égales. Soit  $P_{(z_0)}$  la pression à l'altitude particulière  $z_0$ , et  $P_{(z)}$  la pression à une altitude quelconque  $z$  ; alors :

$$\int_{P_{(z_0)}}^{P_{(z)}} dP_{(z)} = - \int_{z_0}^z \rho g dz = -\rho g \int_{z_0}^z dz \quad (29)$$

Attention à bien faire se correspondre les bornes d'intégration : à droite, on intègre par rapport à la variable  $z$ , alors qu'à gauche, on intègre par rapport à la variable  $P$ . À la borne inférieure d'intégration  $z_0$  doit correspondre la borne inférieure d'intégration  $P_{(z_0)}$ , pression à cette altitude, et de même pour la borne supérieure.

On retrouve bien sûr le même résultat que par la méthode précédente :

$$[P_{(z)}]_{P_{(z_0)}}^{P_{(z)}} = -\rho g [z]_{z_0}^z \Rightarrow P_{(z)} - P_{(z_0)} = -\rho g (z - z_0) \quad (30)$$

Ceci peut encore s'écrire sous la forme :

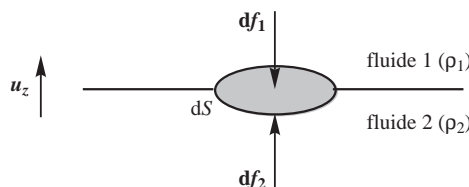
$$P_{(z)} + \rho g z = P_{(z_0)} + \rho g z_0 \quad (31)$$

ce qui signifie que le terme  $P_{(z)} + \rho g z$ , appelé *pression motrice*, est constant dans le fluide au repos.

Attention au signe dans l'équation ! Dans tout le raisonnement précédent, l'axe vertical est orienté vers le haut. Dans le cas contraire, le signe devant  $\rho g$  est inversé dans toutes les équations. De même que pour l'équation locale, on peut facilement détecter une erreur de signe en se rappelant que la pression augmente quand on descend.

### 4.3 Continuité de la pression à une interface.

La loi de pression précédente s'applique dans un fluide homogène. Que se passe-t-il quand on passe d'un fluide à un autre fluide ? Considérons une surface élémentaire  $dS$  à l'interface, supposée plane, entre un fluide de masse volumique  $\rho_1$  et un fluide de masse volumique  $\rho_2$ , tous les deux étant au repos dans le champ de pesanteur. Dans ce cas, l'interface elle-même est au repos, autrement dit, l'élément de surface  $dS$  est à l'équilibre.



Les forces en présence sont les forces pressantes exercées par les deux fluides sur  $dS$ . Si  $P_1$  est la pression dans le fluide 1 juste au-dessus de la surface, et  $P_2$  la pression dans le fluide 2 juste en-dessous de la surface, les forces pressantes exercées par chaque fluide s'expriment de la façon suivante :

$$d\vec{f}_1 = -P_1 dS \vec{u}_z \quad (32)$$

$$d\vec{f}_2 = P_2 dS \vec{u}_z \quad (33)$$

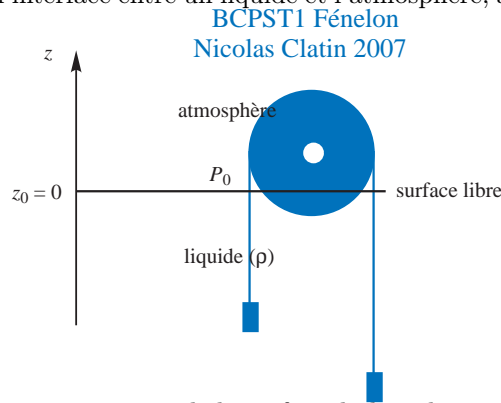
L'équilibre de l'élément de surface implique la nullité de la force globale qui s'y exerce, soit :

$$d\vec{f}_1 + d\vec{f}_2 = \vec{0} \Rightarrow (P_2 - P_1) dS \vec{u}_z = \vec{0} \Rightarrow P_1 = P_2 \quad (34)$$

En d'autres termes, il y a **continuité de la pression à l'interface plane** entre deux fluides au repos.

En réalité, il existe d'autres forces à une interface, qui sont dues aux différences d'interaction des molécules du fluide 1 entre elles et des molécules du fluide 2 entre elles. Ces forces sont appelées forces de tension superficielle. Si l'interface est plane, on a encore  $P_1 = P_2$  ; ceci est le cas loin des bords du fluide, et si aucun effet particulier n'existe (cas des liquides magnétiques sous un champ magnétique par exemple). En revanche, si l'interface est courbée, la relation n'est plus valable. C'est le cas en particulier dans un tuyau étroit : l'interface entre deux fluides prend alors la forme d'un ménisque.

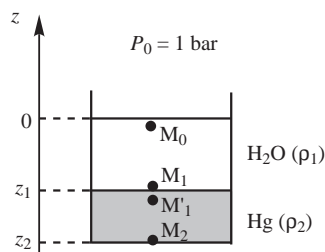
Une application fréquente est l'interface entre un liquide et l'atmosphère, appelée **surface libre du liquide**.



Si  $P_0$  est la pression atmosphérique au niveau de la surface du liquide, située à l'altitude  $z_0 = 0$ , la continuité de la pression implique que la pression dans le liquide à l'altitude  $z_0$  est-à-dire juste en-dessous de l'interface, vaut :  $P_{(z_0)} = P_0$ . D'après (28), la pression dans le liquide de masse volumique  $\rho$  est alors de la forme :

$$P_{(z)} = P_0 - \rho g z \quad (35)$$

Exemple. Un récipient contient une hauteur  $h_1 = 13$  cm d'eau (masse volumique  $\rho_1 = 1,00$  g · cm<sup>-3</sup>) et une hauteur  $h_2 = 7$  cm de mercure (masse volumique  $\rho_2 = 13,6$  g · cm<sup>-3</sup>). Le tout est au contact de l'atmosphère, de pression  $P_0 = 1,0$  bar =  $1,0 \cdot 10^5$  Pa. On cherche la pression au fond du récipient.



Pour résoudre le problème, il faut :

- orienter l'axe vertical,
- définir une altitude de référence (origine de l'axe vertical),
- appliquer la loi de la statique des fluides dans chaque fluide, et utiliser la continuité de la pression aux interfaces.

On choisit d'orienter l'axe vertical vers le haut, pour pouvoir appliquer directement la relation locale de la statique des fluides, et on prend par exemple la surface libre du liquide surnageant (l'eau) comme origine des cotes :  $z = 0$ .

À l'interface entre l'eau et l'air, il y a continuité de la pression, donc la pression dans l'eau à l'altitude  $z = 0$  est égale à la pression dans l'air à la même altitude  $P_0$ .

Dans l'eau, supposée incompressible, on intègre la relation locale de la statique des fluides entre l'altitude 0 (point  $M_0$ ) et l'altitude  $z_1 = -h_1$  (point  $M_1$ ) :

$$\int_{P_0}^{P_{(M_1)}} dP = -\rho_1 g \int_0^{-h_1} dz \Rightarrow P_{(M_1)} - P_0 = -\rho_1 g (-h_1 - 0)$$

$$\Rightarrow P_{(M_1)} = P_0 + \rho_1 g h_1 \quad (36)$$

À l'interface entre l'eau et le mercure, il y a continuité de la pression, donc la pression dans le mercure au point  $M'_1$  est la même que la pression dans l'eau au point  $M_1$  :  $P_{(M'_1)} = P_{(M_1)}$ .

Dans le mercure, on intègre l'équation de la statique des fluides entre l'altitude  $z_1 = -h_1$  (point  $M'_1$ ) et l'altitude  $z_2 = -(h_1 + h_2)$  (point  $M_2$ ) :

$$\int_{P_{(M'_1)}}^{P_{(M_2)}} dP = -\rho_2 g \int_{-h_1}^{-(h_1+h_2)} dz \Rightarrow P_{(M_2)} - P_{(M'_1)} = -\rho_2 g (-h_1 - h_2 + h_1)$$

$$\Rightarrow P_{(M_2)} = P_{(M'_1)} + \rho_2 g h_2 \quad (37)$$

Il reste à remplacer  $P_{(M'_1)} = P_{(M_1)}$  par sa valeur donnée par la relation (36). En définitive, on trouve :

$$P_{(M_2)} = P_0 + \rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2 \quad (38)$$

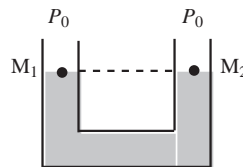
L'application numérique, avec les pressions en Pa, les masses volumiques en  $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$  et les hauteurs en m, donne :  $P_{(M_2)} = 1,1 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 1,1 \text{ bar}$ .

certains droits réservés  
ne peut pas être vendu

## 4.4 Applications.

### 4.4.1 Les vases communicants.

Dans un tube en U contenant un unique liquide, les surfaces libres dans les deux branches sont à la même altitude. En effet, au niveau de chacune des surfaces libres, en  $M_1$  et en  $M_2$ , la pression est  $P_0$  par continuité de la pression à l'interface avec l'atmosphère. Les points  $M_1$  et  $M_2$  sont sur une surface isobare, donc sur une même horizontale.

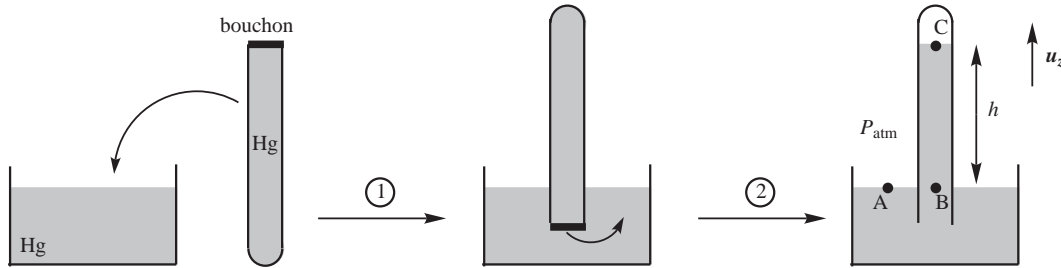


La forme du récipient n'a aucune importance. Le principe des vases communicants est utilisé dans le fonctionnement de la distribution d'eau (châteaux d'eau).



#### 4.4.2 Le baromètre à mercure.

On remplit complètement de mercure (Hg) un tube long de 1 m et on le bouche soigneusement, de sorte qu'il n'y ait que du mercure dans le tube. On le retourne dans une cuve elle-même remplie de mercure (étape 1), puis on enlève le bouchon (étape 2).



Le niveau du mercure dans le tube descend alors et s'immobilise de sorte que la hauteur de la colonne de mercure vaille  $h = 76$  cm. Cette hauteur est invariable si on monte ou si on descend le tube dans la cuve. On va montrer que  $h$  est une mesure de la pression atmosphérique.

À l'extrémité supérieure du tube, il est apparu du vide, car il n'est pas rentré d'air dans le tube lorsqu'on a enlevé le bouchon. En toute rigueur, il y a de la vapeur de mercure (BCPST1 - Nicolas Clatin 2007) mais sa quantité est très faible. La pression à l'extrémité supérieure du tube, et donc la pression au point C à l'interface avec le mercure est nulle :  $P_C \approx 0$ .

Soit B le point dans le tube sur la même horizontale que la surface libre du mercure dans la cuve. Comme B et C sont dans le même liquide, on peut intégrer la relation de la statique des fluides entre ces deux points :

$$\int_{P_C}^{P_B} dP = -\rho_{\text{Hg}} g \int_{z_C}^{z_B} dz \Rightarrow P_B - P_C = -\rho_{\text{Hg}} g (z_B - z_C)$$

$$\Rightarrow P_B = P_C + \rho_{\text{Hg}} g (z_C - z_B)$$

$$\Rightarrow P_B = \rho_{\text{Hg}} g h \tag{39}$$

Les points A et B étant sur une surface isobare, on a :  $P_A = P_B$ . D'autre part, le point A est sur la surface libre du mercure, en contact avec l'atmosphère, donc  $P_A = P_{\text{atm}}$ . En remplaçant dans l'équation précédente, on obtient :

$$P_{\text{atm}} = \rho_{\text{Hg}} g h \tag{40}$$

Ce dispositif permet donc de mesurer la pression atmosphérique ; c'est un **baromètre**. La hauteur de la colonne de mercure dans le tube est directement proportionnelle à la pression atmosphérique. Connaissant la masse volumique du mercure à température ambiante :  $\rho_{\text{Hg}} = 13,6 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3} = 13,6 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , et le champ de pesanteur terrestre, on en déduit la pression atmosphérique :  $P_{\text{atm}} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ .

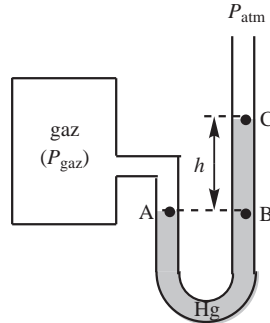
Cette expérience est historique à plus d'un titre. D'une part, elle a permis de prouver l'existence du vide, controversée à cette époque (même si la présence de la vapeur de mercure a été supposée très rapidement). D'autre part, elle a fait avancer les connaissances sur la statique des fluides et le comportement des gaz.

L'invention du baromètre est attribuée à Torricelli, en 1644, mais c'est en réalité le résultat des travaux de plusieurs personnes sur quelques dizaines d'années. La contribution majeure de Torricelli a été de proposer l'utilisation du mercure, liquide très dense, pour parvenir à une hauteur de colonne raisonnable ; il a ensuite réalisé l'expérience. La théorisation soignée ainsi que l'établissement de la relation  $\Delta P = \rho g h$  a été faite par Pascal une vingtaine d'années plus tard.

Le baromètre à mercure ayant été pendant longtemps le seul moyen de mesurer la pression atmosphérique, une unité adaptée a longtemps été employée : le *millimètre de mercure* noté mmHg, encore appelé le *torr*, avec la conversion suivante :  $760 \text{ mmHg} = 760 \text{ torr} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$  soit  $1 \text{ mmHg} = 1 \text{ torr} = 133 \text{ Pa}$ . Ces unités sont dorénavant proscrites.

### 4.4.3 Le manomètre.

Un **manomètre** est un appareil destiné à comparer la pression d'un fluide à celle de l'atmosphère. Le fluide, la plupart du temps un gaz, est enfermé dans une enceinte, reliée à l'atmosphère extérieure par l'intermédiaire d'un tube en U rempli d'un liquide très dense, par exemple du mercure.



Par continuité aux interfaces entre le mercure et le gaz dans l'enceinte, et entre le mercure et l'atmosphère, les pressions dans le mercure aux points A et C sont :  $P_A = P_{\text{gaz}}$  et  $P_C = P_{\text{atm}}$ .

D'autre part, A (qui est sur la même horizontale que B) et C étant dans le même fluide, on peut intégrer la relation locale de la statique des fluides entre ces deux points :

$$\int_{P_C}^{P_A} dP = -\rho_{\text{Hg}} g \int_{z_C}^{z_A} dz \Rightarrow P_A - P_C = -\rho_{\text{Hg}} g (z_A - z_C)$$

$$\Rightarrow P_A = P_C + \rho_{\text{Hg}} gh \quad (41)$$

La mesure de la dénivellation est donc une mesure de la différence de pression entre l'intérieur de l'enceinte et l'atmosphère. Le manomètre permet de mesurer la pression d'un gaz, connaissant la pression de l'atmosphère (ou de tout autre gaz au contact de l'extrémité du tube).

Attention aux signes! Ici, la pression du gaz est supérieure à celle de l'atmosphère, mais on pourrait imaginer la situation inverse, pour laquelle le point C serait en-dessous du point A. Le signe dans la formule changerait.

## 5 Cas d'un gaz homogène compressible ; modèle de l'atmosphère.

### 5.1 Modèle de l'atmosphère isotherme.

On étudie maintenant l'atmosphère, qui est une couche de gaz entourant la Terre. On se limite à des altitudes inférieures à environ 30 km, pour lesquelles le champ de pesanteur terrestre peut être considéré constant.

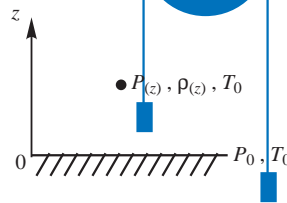
L'atmosphère est un gaz composé d'environ 20% de dioxygène et 80% de diazote. Sa masse molaire moyenne est donc :  $M = 0,2 \times 32 + 0,8 \times 28 \approx 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ . Les gaz étant très compressibles, il est exclu de faire l'hypothèse que la masse volumique soit constante. Dans les conditions de température et de pression observées sur Terre, l'atmosphère se comporte quasiment comme un gaz parfait ; pour  $n$  moles d'air, occupant un volume  $V$  sous la pression  $P$  et à la température  $T$ , l'équation des gaz parfaits est donc vérifiée :

$$PV = nRT = \frac{m}{M} \times RT \quad (42)$$

où  $m$  est la masse de gaz correspondant aux  $n$  moles et  $R$  la constante des gaz parfaits ( $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ). On en déduit l'expression de la masse volumique de l'air :

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{MP}{RT} \quad (43)$$

On cherche la loi de pression dans l'atmosphère à partir de l'équation locale de la statique des fluides, qui fait apparaître la masse volumique. Or, d'après l'expression précédente, celle-ci dépend de  $P$  mais aussi de  $T$ , c'est-à-dire de deux variables, ce qui complique l'intégration. On va donc supposer dans ce modèle que la température de l'atmosphère est uniforme et constante, égale à sa valeur mesurée au sol  $T_0$ . C'est le modèle de l'atmosphère isotherme.



On choisit un axe vertical dirigé vers le haut, et on prend le sol comme altitude de référence ( $z = 0$ ) à laquelle la pression est  $P_0$ . En un point quelconque à l'altitude  $z$ , la masse volumique est  $\rho(z)$ , la pression est  $P(z)$  et la température est  $T_0$ .

### 5.2 Intégration de l'équation locale.

Récrivons l'équation locale, en exprimant la masse volumique. L'équilibre d'une particule de fluide à l'altitude  $z$ , de pression  $P$  et de température  $T_0$  s'écrit :

$$dP + \rho(z)g dz = 0 \Rightarrow dP + \frac{MP}{RT_0} g dz = 0 \quad (44)$$

Dans cette équation, deux quantités varient : l'altitude  $z$  et la pression  $P$ . Pour intégrer cette équation, il faut effectuer une *séparation des variables* : on met d'un côté tous les termes de la variable  $z$  et de l'autre tous ceux de la variable  $P$ . On obtient :

$$dP = -\frac{MP}{RT_0} g dz \Rightarrow \frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{RT_0} dz \quad (45)$$

Il reste à intégrer entre une altitude de référence, par exemple le sol  $z = 0$  où la pression est  $P_0$ , et une altitude quelconque  $z$  où la pression est  $P(z)$ , en sortant de l'intégrale tous les termes constants :

$$\int_{P_0}^{P(z)} \frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{RT_0} \int_0^z dz \Rightarrow [\ln P]_{P_0}^{P(z)} = -\frac{Mg}{RT_0} [z]_0^z \Rightarrow \ln \frac{P(z)}{P_0} = -\frac{Mg}{RT_0} z \quad (46)$$

En passant à l'exponentielle, on parvient à la loi d'évolution de la pression atmosphérique en fonction de l'altitude, en supposant une atmosphère de température constante  $T_0$  :

$$P_{(z)} = P_0 \exp\left(-\frac{Mgz}{RT_0}\right) \quad (47)$$

soit :

$$P_{(z)} = P_0 e^{-z/H} \quad \text{avec} \quad H = \frac{RT_0}{Mg} \quad (48)$$

La pression atmosphérique décroît donc de façon exponentielle avec l'altitude. La rapidité de cette décroissance est quantifiée par  $H$ , l'altitude caractéristique : pour toute élévation de  $H$ , soit environ 8 km si  $T_0 = 273$  K, la pression est divisée par e.

Le modèle choisi est très critiquable, car l'atmosphère n'est pas du tout isotherme ; ainsi, la température à 10 km d'altitude est d'environ  $-50$  °C. En outre, l'atmosphère n'est nullement au repos. Néanmoins, la loi de pression obtenue avec ce modèle simpliste est relativement réaliste.

### 5.3 La pression d'un gaz.

BCPST1 Fénelon  
Nicolas Clatin 2007

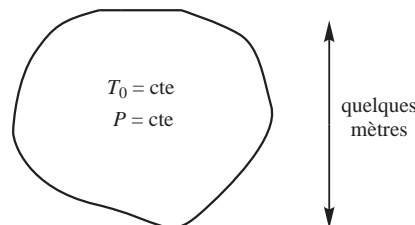
Le calcul précédent est en fait valable pour tout gaz au repos à une température uniforme et constante. Considérons donc un système gazeux quelconque, de hauteur caractéristique  $H$  ; la la pression à la limite inférieure du système ( $z = 0$ ) est  $P_0$ . La pression à l'altitude  $z$  est  $P_{(z)}$ . D'après (48), la variation relative de pression entre l'altitude  $z = 0$  et l'altitude  $z$  vaut :

$$\frac{P_{(z)} - P_0}{P_0} = \frac{P_{(z)}}{P_0} - 1 = e^{-z/H} - 1 \quad (49)$$

À quelle altitude  $z_1$  la pression a-t-elle diminué de 0,1% ? On doit résoudre :

$$e^{-z_1/H} - 1 = -\frac{0,1}{100} = -10^{-3} \Rightarrow e^{-z_1/H} = 1 - 10^{-3} \Rightarrow -\frac{z_1}{H} = \ln(1 - 10^{-3}) \Rightarrow z_1 = -H \ln(1 - 10^{-3}) \quad (50)$$

Si le système gazeux étudié est de l'air ( $M = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ ) à la température  $T_0 = 273$  K, la valeur de  $H$  est connue, et on calcule  $z_1 \approx 8$  m. Autrement dit, pour un système gazeux de température uniforme et constante, d'environ 10 m d'épaisseur, la différence de pression entre le haut et bas du système est de 0,1% environ



On en tire une conclusion très importante : pour un **volume gazeux de taille inférieure à quelques mètres**, on peut considérer que **la pression est constante dans tout le volume** ; on parle de **LA pression du gaz**.

## 5.4 Interprétation microscopique de la loi de pression.

### 5.4.1 Concentration particulaire.

Reprenons le cas de l'atmosphère isotherme à la température  $T_0$ . On souhaite savoir comment évolue la densité particulaire, c'est-à-dire le nombre de molécules d'air par unité de volume, en fonction de l'altitude. Si  $N$  est le nombre de molécules dans un volume  $V$ , la concentration particulaire est :

$$n^* = \frac{N}{V} = \frac{nN_A}{V} \quad (51)$$

où  $n$  est le nombre de moles correspondant à  $N$  et  $N_A$  le nombre d'Avogadro ( $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ ). La pression à l'altitude  $z$  est reliée à la concentration particulaire par l'équation des gaz parfaits :

$$P_{(z)} = \frac{nRT_0}{V} = \frac{NRT_0}{VN_A} = n^* k_B T_0 \quad \text{avec} \quad k_B = \frac{R}{N_A} \quad (52)$$

La grandeur  $k_B$  est une constante universelle appelée la **constante de Boltzmann**. Puisque la pression  $P$  dépend de  $z$ , la concentration particulaire est également une fonction de l'altitude; en utilisant (47) où  $P_0$  est la pression à l'altitude  $z = 0$ , on a :

$$n^*_{(z)} = \frac{P_{(z)}}{k_B T_0} = \frac{P_0 \exp\left(-\frac{Mgz}{RT_0}\right)}{k_B T_0} \quad (53)$$

Le facteur devant l'exponentielle n'est autre, d'après (52), que la concentration particulaire sous la pression  $P_0$ , soit la concentration particulaire à l'altitude nulle  $n^*_0$ . D'autre part, le facteur sous l'exponentielle, qui contient des grandeurs molaires ( $M$  et  $R$ ) peut se réarranger pour faire apparaître des grandeurs moléculaires, ce qui est logique dans une équation donnant une concentration particulaire (et non molaire). Si  $m$  est la masse moyenne d'une molécule d'air, on a :

$$\frac{M}{R} = \frac{mN_A}{R} = \frac{m}{k_B} \quad (54)$$

En reportant dans (53), on constate que la concentration particulaire décroît exponentiellement avec l'altitude :

$$n^*_{(z)} = n^*_0 \exp\left(-\frac{mgz}{k_B T_0}\right) \quad (55)$$

Le terme  $mgz$  est en fait l'énergie potentielle de pesanteur  $E_p$  de la particule de masse  $m$ , c'est-à-dire l'énergie dont dispose la particule à l'altitude  $z$  (on reviendra sur l'énergie des systèmes mécaniques ultérieurement). D'autre part, le terme  $k_B T_0$ , souvent nommé *énergie thermique* est une mesure de l'agitation des particules; c'est l'énergie moyenne qui est communiquée à une particule au cours d'un choc avec une autre particule. La concentration particulaire est reliée au rapport entre ces deux énergies :

$$n^*_{(z)} = n^*_0 e^{-E_p/k_B T_0} \quad (56)$$

### 5.4.2 Répartition de Boltzmann.

La première interprétation de cette formule est la suivante. Les influences des deux énergies mises en jeu sont opposées.

- Plus  $z$  augmente, plus  $E_p$  augmente, et plus  $n^*$  diminue. En effet, un système est d'autant plus stable que son énergie potentielle est petite; à l'équilibre, on s'attend à avoir une majorité de molécules avec une énergie potentielle petite, donc à basse altitude. En d'autres termes, la gravité tend à ramener les molécules au niveau du sol.

- Les chocs entre molécules ont tendance à les mélanger. Plus l'énergie thermique est importante, plus les molécules subiront des chocs importants et nombreux, et plus la probabilité que certaines s'élèvent en altitude augmente.

Autrement dit, la répartition des particules en fonction de l'altitude est le résultat de la compétition entre les deux contributions énergétiques : énergie potentielle de pesanteur et agitation thermique.

Cette loi, connue sous le nom de **distribution de Boltzmann** est extrêmement générale. Pour un système de particules en équilibre et soumises à l'agitation thermique à la température  $T$ , le nombre  $n_j$  de particules ayant l'énergie  $E_j$  est de la forme :

$$n_j = A e^{-E_j/k_B T} \quad (57)$$

où  $A$  est une constante homogène à un nombre de molécules.

Cette loi intervient dans quasiment tous les systèmes physiques ou chimiques, car il est très difficile de trouver un système qui ne soit pas soumis à l'agitation thermique, sauf à travailler à des températures extrêmement basses.

Attention ! Ceci n'est valable que si le système est à l'équilibre. Par exemple, dans le cas des molécules de l'atmosphère, la loi a été établie en supposant l'air au repos.

Considérons maintenant deux altitudes  $z_1$  et  $z_2$ . À ces altitudes, les énergies potentielles de pesanteur sont différentes :  $E_{p1}$  et  $E_{p2}$ . On dit qu'on a affaire à deux **niveaux d'énergie**. Comparons les **populations** de ces deux niveaux, c'est-à-dire le nombre de particules « dans » l'un et « dans » l'autre, ce qui est un abus de langage usuel pour parler du nombre de particules ayant les énergies  $E_{p1}$  et  $E_{p2}$  respectivement. En appliquant (56), on a :

$$\frac{n_1^*}{n_2^*} = \frac{n_0^* e^{-E_{p1}/k_B T_0}}{n_0^* e^{-E_{p2}/k_B T_0}} = \exp\left(-\frac{E_{p1} - E_{p2}}{k_B T_0}\right) \quad (58)$$

Dans le cas où  $z_1 < z_2$ , alors  $E_{p1} < E_{p2}$  et  $n_1^* > n_2^*$ , ce qui est attendu. Le rapport des deux populations est relié à l'exponentielle de la différence d'énergie entre les deux niveaux.

À nouveau, ceci est généralisable. Si on considère une population de particules à l'équilibre et soumises à l'agitation thermique, le rapport des populations  $n_j$  et  $n_i$  de deux niveaux d'énergie  $E_j$  et  $E_i$  à la température  $T$  est :

$$\frac{n_j}{n_i} = \exp\left(-\frac{E_j - E_i}{k_B T}\right) \quad (59)$$

À l'équilibre, le rapport des populations varie donc exponentiellement avec la différence d'énergie des niveaux. Il s'agit d'une décroissance extrêmement rapide avec l'augmentation de l'énergie. Pour de nombreux systèmes à l'équilibre, on peut supposer avec une bonne approximation que seuls les niveaux d'énergie les plus bas sont peuplés.