**MÉCANIQUE**

**chapitre 4**

# Cinématique

La cinématique est l'étude des mouvements indépendamment de leur cause. On s'intéresse donc dans ce chapitre aux caractéristiques du mouvement d'un point de vue purement géométrique : allure de la trajectoire, choix raisonné d'un repère, définition des vecteurs vitesse et accélération dans différents systèmes de coordonnées, etc.

En première année, on se limite à la cinématique du solide ponctuel. Ainsi, on ne considèrera pas les mouvements de rotation d'un objet sur lui-même, et encore moins les problèmes de déformation des solides. En deuxième année, la cinématique des fluides sera abordée.

Dans tout ce chapitre, on suppose que l'observateur dispose d'une horloge qui permet la mesure du temps. En outre, l'espace est supposé euclidien à trois dimensions : il vérifie les axiomes d'Euclide, et entre autres conséquences, la somme des angles d'un triangle vaut $\pi$. En réalité, le temps dépend de l'observateur (ce qui est pris en compte dans la théorie de la relativité restreinte), et l'Univers dans lequel nous vivons n'est pas euclidien (ce qui est pris en compte dans la théorie de la relativité générale).

Plan du chapitre.


1. Position, vitesse et accélération en coordonnées cartésiennes
   - 1.1 Repérage d'un point
   - 1.2 Vitesse
   - 1.3 Accélération
   - 1.4 Mouvement rectiligne
2. Position, vitesse et accélération en coordonnées cylindriques
   - 2.1 Symétrie cylindrique
   - 2.2 Repérage d'un point en coordonnées cylindriques
   - 2.3 Repère local en coordonnées cylindriques ; vecteur position
   - 2.4 Cas d'un mouvement plan
   - 2.5 Vitesse
   - 2.6 Accélération
   - 2.7 Mouvement circulaire
3. Position en coordonnées sphériques
   - 3.1 Symétrie sphérique
   - 3.2 Repérage d'un point en coordonnées sphériques
   - 3.3 Repère local en coordonnées sphériques

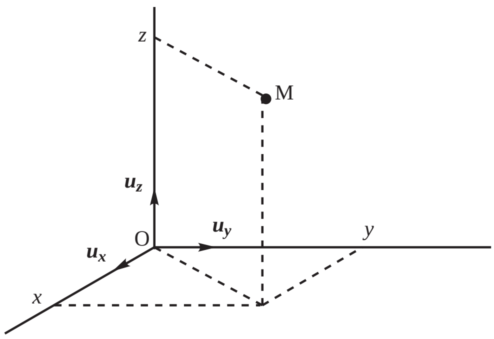
# 1 Position, vitesse et accélération en coordonnées cartésiennes.

## 1.1 Repérage d'un point.

Le repérage d'un point, c'est-à-dire la définition de sa position, nécessite de munir l'espace d'une **base** ou **repère**, qui est la donnée :
- d'un point O, centre du repère,
- de trois vecteurs linéairement indépendants, qu'on notera $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$.

Le repère $(\mathrm{O}, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ est dit **cartésien** s'il est **orthonormé direct**. Ceci signifie que les vecteurs de base sont :
- orthogonaux deux à deux (*ortho*) : $\vec{u}_x \cdot \vec{u}_y = \vec{u}_x \cdot \vec{u}_z = \vec{u}_y \cdot \vec{u}_z = 0$,
- de norme unité (*normé*) : $\|\vec{u}_x\| = \|\vec{u}_y\| = \|\vec{u}_z\| = 1$,
- orientés par la règle des trois doigts ou la règle du tire-bouchon (*direct*).

On rappelle la règle des trois doigts : $\vec{u}_x$ étant donné par la direction du pouce et $\vec{u}_y$ par celle de l'index, la direction de $\vec{u}_z$ est donnée par le majeur tendu du côté de la paume, l'ensemble de l'opération étant réalisée avec la main droite. La règle du tire bouchon s'applique de la façon suivante : un tire-bouchon tournant dans le sens amenant $\vec{u}_x$ sur $\vec{u}_y$ avance dans la direction de $\vec{u}_z$.




Un point M quelconque dans l'espace muni de la base cartésienne $(\mathrm{O}, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ est repéré par le **vecteur position** :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\,\vec{u}_x + y\,\vec{u}_y + z\,\vec{u}_z} \tag{1}$$

Le triplet $(x, y, z)$ constitue les **coordonnées cartésiennes** de M. Il s'agit de la donnée des trois composantes du vecteur position. Les coordonnées du centre du repère sont évidemment $(0, 0, 0)$.

Lorsqu'un point se déplace, l'ensemble des positions successives qu'il prend au cours du temps constitue une courbe appelée la **trajectoire** de ce point. L'équation paramétrique de la trajectoire est donnée par le système des trois équations $(x_{(t)}, y_{(t)}, z_{(t)})$. L'équation cartésienne de la trajectoire, qui relie $x$, $y$ et $z$, est obtenue en éliminant le temps dans le système d'équations paramétriques.

La **distance** du point M de coordonnées $(x, y, z)$ au centre du repère O est :

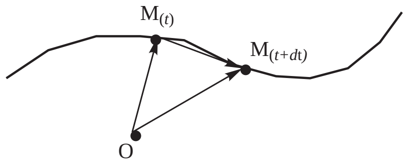
$$\boxed{\left\|\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right\| = \sqrt{\overrightarrow{\mathrm{OM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OM}}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \tag{2}$$

On rappelle que d'une façon générale, si deux points $\mathrm{M}_1$ et $\mathrm{M}_2$, ont pour coordonnées $(x_1, y_1, z_1)$ et $(x_2, y_2, z_2)$ dans un repère orthonormé, la distance qui les sépare est donnée par :

$$\left\|\overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2}\right\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \tag{3}$$

## 1.2 Vitesse.

Considérons un mobile M qui se déplace sur sa trajectoire. À l'instant $t$, il occupe la position $\mathrm{M}_{(t)}$ ; à l'instant $t+\mathrm{d}t$, avec $\mathrm{d}t$ infiniment petit, il occupe une position très voisine $\mathrm{M}_{(t+\mathrm{d}t)}$. Comme ces deux positions sont très proches, le déplacement du mobile durant l'intervalle de temps $\mathrm{d}t$ est quasiment linéaire, donc confondu avec le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{M}_{(t)}\mathrm{M}_{(t+\mathrm{d}t)}}$.




Par définition, le vecteur vitesse à l'instant $t$ est :

$$\vec{v} = \lim_{\mathrm{d}t\to 0} \frac{\overrightarrow{\mathrm{M}_{(t)}\mathrm{M}_{(t+\mathrm{d}t)}}}{\mathrm{d}t} \tag{4}$$

On cherche à exprimer le vecteur vitesse à l'instant $t$ en fonction du vecteur position à cet instant. Soit O l'origine du repère ; on a :

$$\overrightarrow{\mathrm{M}_{(t)}\mathrm{M}_{(t+\mathrm{d}t)}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}_{(t+\mathrm{d}t)}} - \overrightarrow{\mathrm{OM}_{(t)}} \Rightarrow \vec{v} = \lim_{\mathrm{d}t\to 0} \frac{\overrightarrow{\mathrm{OM}_{(t+\mathrm{d}t)}} - \overrightarrow{\mathrm{OM}_{(t)}}}{\mathrm{d}t} \tag{5}$$

Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ étant une fonction du temps, le terme de droite correspond à la définition mathématique de la dérivée de cette fonction à l'instant $t$, soit :

$$\boxed{\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{d}t}} \tag{6}$$

Déterminons les composantes du vecteur $\vec{v}$ dans le repère cartésien $(\mathrm{O}, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. Soit $(x, y, z)$ les coordonnées de $\mathrm{M}_{(t)}$ ; à l'instant $t+\mathrm{d}t$, les coordonnées ont évolué d'une quantité infinitésimale, c'est-à-dire que les coordonnées de $\mathrm{M}_{(t+\mathrm{d}t)}$ sont $(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y, z+\mathrm{d}z)$. On a alors :

$$\begin{aligned}\frac{\overrightarrow{\mathrm{OM}_{(t+\mathrm{d}t)}} - \overrightarrow{\mathrm{OM}_{(t)}}}{\mathrm{d}t} &= \frac{(x+\mathrm{d}x)\,\vec{u}_x + (y+\mathrm{d}y)\,\vec{u}_y + (z+\mathrm{d}z)\,\vec{u}_z - x\,\vec{u}_x - y\,\vec{u}_y - z\,\vec{u}_z}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\mathrm{d}x\,\vec{u}_x + \mathrm{d}y\,\vec{u}_y + \mathrm{d}z\,\vec{u}_z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{u}_x + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{u}_y + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{u}_z \end{aligned} \tag{7}$$

Ce résultat s'obtient directement en dérivant le vecteur position donné par (1). Les vecteurs de base étant constants, on peut les sortir de la dérivée :

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}(x\,\vec{u}_x + y\,\vec{u}_y + z\,\vec{u}_z)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{u}_x + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{u}_y + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{u}_z \tag{8}$$

En adoptant la notation de Newton, qui consiste à indiquer la dérivée temporelle d'une variable à l'aide d'un point surmontant cette variable, on a finalement :

$$\boxed{\vec{v} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{u}_x + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{u}_y + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{u}_z = \dot{x}\,\vec{u}_x + \dot{y}\,\vec{u}_y + \dot{z}\,\vec{u}_z} \tag{9}$$

Les composantes du vecteur vitesse sont donc :

$$\vec{v} \left| \begin{array}{l} v_x = \dot{x} \\ v_y = \dot{y} \\ v_z = \dot{z} \end{array} \right. \tag{10}$$

La « vitesse » du langage courant mesure de combien le point se déplace par unité de temps. C'est la valeur numérique du module du vecteur vitesse, exprimé en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, soit :

$$\boxed{v = \|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} \tag{11}$$

## 1.3 Accélération.

Le vecteur accélération est par définition la dérivée temporelle du vecteur vitesse, et par voie de conséquence la dérivée seconde du vecteur position :

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{d}t^2}} \tag{12}$$

Les vecteurs de la base étant constants, la dérivation conduit immédiatement à :

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}\,\vec{u}_x + \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\,\vec{u}_y + \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}\,\vec{u}_z = \ddot{x}\,\vec{u}_x + \ddot{y}\,\vec{u}_y + \ddot{z}\,\vec{u}_z} \tag{13}$$

Les composantes du vecteur accélération sont donc :

$$\vec{a} \left| \begin{array}{l} a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} \\ a_y = \dot{v}_y = \ddot{y} \\ a_z = \dot{v}_z = \ddot{z} \end{array} \right. \tag{14}$$

L'accélération physique est une grandeur vectorielle. Elle diffère donc de l'« accélération » du langage courant, qui signifie une augmentation de la vitesse au cours du temps (par opposition à la « décélération »). En physique, le mobile en mouvement est accéléré si son vecteur vitesse varie au cours du temps, cette variation pouvant correspondre à une modification de sa valeur numérique (augmentation ou diminution de $\|\vec{v}\|$), et/ou à une modification de la direction du vecteur vitesse $\vec{v}$.

Une augmentation de la vitesse (en norme) signifie que $\|\vec{v}\|$ augmente, soit que $\vec{v}^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$ augmente, soit que :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}^{\,2}}{\mathrm{d}t} > 0 \tag{15}$$

La dérivation d'un vecteur obéit aux mêmes lois que la dérivation d'une fonction ; ici il s'agit d'une puissance, donc :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}^{\,2}}{\mathrm{d}t} = 2\,\vec{v} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = 2\,\vec{v} \cdot \vec{a} \tag{16}$$

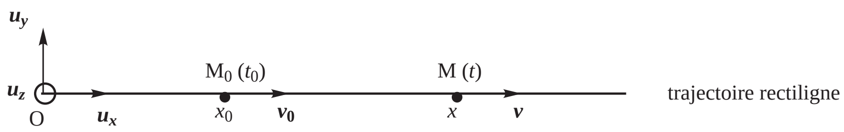
On en déduit donc que l'« accélération » et la « décélération » du langage courant correspondent respectivement à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}^{\,2}}{\mathrm{d}t} > 0 \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{a} > 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}^{\,2}}{\mathrm{d}t} < 0 \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{a} < 0 \end{array} \right. \tag{17}$$

## 1.4 Mouvement rectiligne.

### 1.4.1 Contraintes imposées par un mouvement rectiligne.

Il arrive que la nature du système étudié implique que le mouvement soit nécessairement rectiligne, c'est-à-dire que le mobile M se déplace le long d'une droite. C'est le cas d'un anneau qui coulisse sur une tige, ou d'un wagon qui se déplace sur un rail droit.




Le fait que le mouvement soit rectiligne entraine des simplifications de calcul, à condition de choisir un repère adapté à la géométrie du problème. La droite support de la trajectoire joue un rôle particulier ; choisissons donc un repère cartésien dont l'origine O est situé sur la droite, et dont un vecteur de base, par exemple $\vec{u}_x$, est selon la direction de celle-ci.

Dans ce repère, supposons que le mobile M soit à la position $M_0$ d'abscisse $x_0$ à l'instant initial $t = 0$, et que sa vitesse à cet instant soit $\vec{v}_0$. À une date $t$, il se trouve à l'abscisse $x$ et sa vitesse est $\vec{v}$. Comme le mouvement est rectiligne suivant la droite $(\mathrm{O}, \vec{u}_x)$, les coordonnées $y$ et $z$ sont nulles à tout instant. Le vecteur position à une date quelconque est donc de la forme :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\,\vec{u}_x \Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{OM}} = \left| \begin{array}{l} x \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right. \tag{18}$$

Par dérivation temporelle, on constate que la vitesse est nécessairement suivant $(\mathrm{O}, \vec{u}_x)$ à tout instant :

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{d}t} = \dot{x}\,\vec{u}_x \Rightarrow \vec{v} = \left| \begin{array}{l} v_x = \dot{x} \\ v_y = 0 \\ v_z = 0 \end{array} \right. \tag{19}$$

De même, l'accélaration est également toujours suivant $(\mathrm{O}, \vec{u}_x)$ :

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \ddot{x}\,\vec{u}_x \Rightarrow \vec{a} = \left| \begin{array}{l} a_x = \ddot{x} \\ a_y = 0 \\ a_z = 0 \end{array} \right. \tag{20}$$

En conséquence, si le mouvement est rectiligne, les vecteurs position, vitesse et accélération n'ont de composante non nulle que suivant la direction du mouvement. De ce fait, le vecteur vitesse initiale est de la forme :

$$\vec{v}_0 = v_0\,\vec{u}_x = \left| \begin{array}{l} v_0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right. \tag{21}$$

### 1.4.2 Condition pour avoir un mouvement rectiligne.

Si le mouvement est rectiligne, alors nécessairement $\vec{a}$ est un vecteur ayant toujours la même direction (celle du mouvement). Est-ce une condition suffisante ?

Considérons un mobile soumis à une accélération de direction constante : $\vec{a} = a\,\vec{u}_x$, telle que, à $t = 0$ l'accélération et la vitesse soient $\vec{a}_0$ et $\vec{v}_0$. Il est évident que si ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, l'accélération va modifier la direction de la vitesse et donc celle du mouvement.

Une accélération de direction constante est donc une condition nécessaire mais pas suffisante pour que le mouvement soit rectiligne.

### 1.4.3 Mouvement rectiligne uniforme.

Un mouvement est dit uniforme si la valeur de la vitesse, c'est-à-dire la norme du vecteur vitesse, est constante au cours du temps. Un mouvement **rectiligne uniforme** correspond donc à un mouvement tel que :
- la direction de $\vec{v}$ est constante (rectiligne),
- la norme de $\vec{v}$ est constante (uniforme).

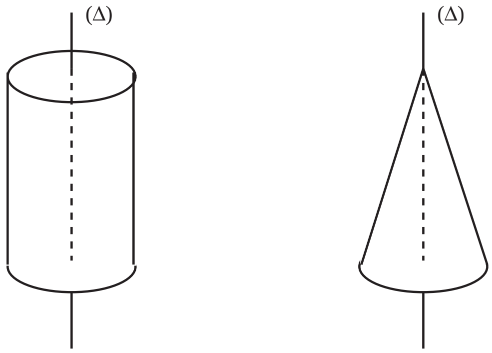
Ces deux conditions correspondent à un vecteur vitesse constant : $\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{cte}}$, autrement dit une accélération nulle à tout instant.

| |
|---|
| Le mouvement est **rectiligne uniforme**<br>si et seulement si $\vec{a} = 0$ à tout instant. |

# 2 Position, vitesse et accélération en coordonnées cylindriques.

## 2.1 Symétrie cylindrique.

Un problème possède une **symétrie cylindrique** s'il existe un axe $(\Delta)$ tel que les propriétés du problème soient invariantes par une rotation d'angle quelconque autour de $(\Delta)$. Un cylindre est l'archétype de l'objet à symétrie cylindrique ; un cône ou une bouteille sont aussi à symétrie cylindrique.



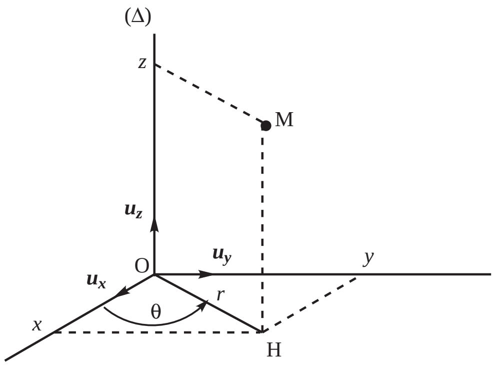

Lorsque le problème admet une symétrie cylindrique d'axe $(\Delta)$, tout plan contenant $(\Delta)$ est un plan de symétrie.

Il n'est pas nécessaire qu'il y ait symétrie cylindrique pour toutes les propriétés du système, mais seulement pour celles qui sont intéressantes dans le cadre du problème étudié.

## 2.2 Repérage d'un point en coordonnées cylindriques.

Lorsque le problème est à symétrie cylindrique, il est évidemment possible d'utiliser les coordonnées cartésiennes, mais celles-ci sont peu adaptées. Il est préférable d'utiliser un système de coordonnées qui respecte la symétrie du problème. Les calculs sont alors simplifiés, et l'interprétation physique des résultats est plus évidente.

Considérons un point M dans un repère cartésien. Il est évident que l'axe de symétrie $(\Delta)$ va jouer un rôle particulier ; il est donc sensé de choisir l'origine O du repère sur l'axe, et de faire correspondre un des vecteurs de la base cartésienne avec la direction de $(\Delta)$. Par convention, on choisit $(\Delta) = (\mathrm{O}, \vec{u}_z)$.



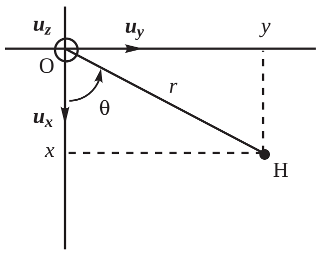

Appelons H la projection orthogonale de M sur le plan $(\mathrm{O}, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$, c'est-à-dire sur le plan orthogonal à $(\Delta)$ et passant par O. En symétrie cylindrique, il est probable que la **distance** de M **à l'axe** soit un paramètre pertinent ; c'est également la distance de O à H, notée généralement $r$ (ou $\rho$). La direction selon laquelle se trouvent M et H est repérée par l'**angle orienté** $\theta$ que font $\vec{u}_x$ et OH. Enfin, la position de M par rapport à H est définie par la distance algébrique de H à M. En définitive, le point M est repéré par l'ensemble ses **coordonnées cylindriques** $(r, \theta, z)$, avec :

$$\boxed{\begin{cases} r = \mathrm{OH} \\ \theta = (\vec{u}_x, \overrightarrow{\mathrm{OH}}) \\ z = \overline{\mathrm{HM}} \end{cases}} \tag{22}$$

Pour pouvoir décrire tous les points de l'espace, il faut :
- parcourir toutes les distances à l'axe, soit $0 \leq r < +\infty$,
- décrire toutes les directions autour de l'axe, soit $-\pi \leq \theta < \pi$, ou de façon équivalente $0 \leq \theta < 2\pi$,
- parcourir tout l'axe $(\Delta)$, soit $-\infty < z < \infty$.

À chaque point de l'espace correspond un unique triplet de coordonnées $(r, \theta, z)$, à l'exception des points de l'axe. En effet, pour un point de l'axe, $r = 0$ et $z$ est donné ; l'angle $\theta$ peut prendre n'importe quelle valeur, ce qui correspond à une infinité de triplets possibles.

Il est utile de pouvoir faire la correspondance entre les coordonnées cartésiennes et cylindriques. De façon évidente, la coordonnée cylindrique $z$ correspond à la cote en coordonnées cartésiennes. D'autre part, dans le plan $(\mathrm{O}, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$, on a la représentation suivante :




Les abscisses $x$ et $y$ de H (donc de M) sont liées à $\cos\theta$ et $\sin\theta$. La correspondance entre les deux systèmes de coordonnées est donc :

$$\boxed{\begin{cases} x = r\,\cos\theta \\ y = r\,\sin\theta \\ z = z \end{cases}} \tag{23}$$

## 2.3 Repère local en coordonnées cylindriques ; vecteur position.

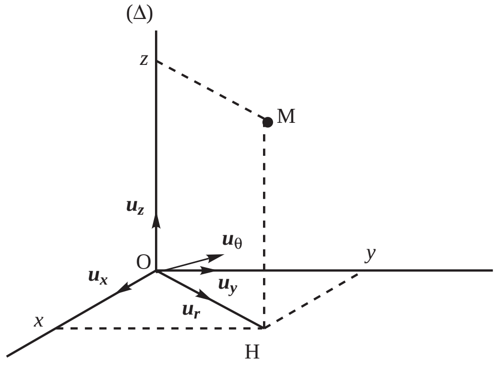
En coordonnées cylindriques, il est souvent commode d'utiliser un repère, dans lequel le vecteur position de M s'exprime simplement en fonction des coordonnées cylindriques. L'origine de ce repère est un point de l'axe (en pratique, on choisit O).

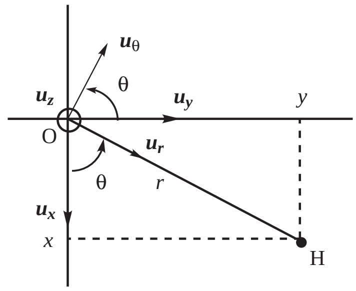
D'une part, comme la cote $z$ est la même en coordonnées cylindriques et en coordonnées cartésiennes, il est naturel de garder le vecteur $\vec{u}_z$ des coordonnées cartésiennes comme l'un des vecteurs du nouveau repère.

D'autre part, la distance $r$ à l'axe jouant un rôle important en symétrie cylindrique, il faut que le repère mette facilement en évidence cette distance. On définit donc un vecteur unitaire, noté $\vec{u}_r$ et appelé **vecteur radial**, colinéaire à $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$, soit :

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = r\,\vec{u}_r \tag{24}$$

Le dernier vecteur, noté $\vec{u}_\theta$ et appelé **vecteur orthoradial**, est choisi par convention de sorte que $(\mathrm{O}, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ soit **orthonormée directe**. La représentation des vecteurs de la base ainsi définie est donc la suivante :




Le repère $(\mathrm{O}, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ est qualifié de **repère local**, car il se déplace avec le point H, donc avec le point M. En d'autres termes, les vecteurs de base $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ ne sont pas des vecteurs constants : leur norme est constante (égale à 1), mais leur direction est liée à celle de OH. On peut d'ailleurs facilement montrer que leurs expressions en fonction des vecteurs fixes $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$ dépend de $\theta$ :

$$\vec{u}_r = \|\vec{u}_r\| \cos\theta \, \vec{u}_x + \|\vec{u}_r\| \sin\theta \, \vec{u}_y \qquad (25)$$

$$\vec{u}_\theta = -\|\vec{u}_\theta\| \sin\theta \, \vec{u}_x + \|\vec{u}_\theta\| \cos\theta \, \vec{u}_y \qquad (26)$$

Comme ces deux vecteurs sont de norme unité, on en déduit :

$$\boxed{\vec{u}_r = \cos\theta \, \vec{u}_x + \sin\theta \, \vec{u}_y} \qquad (27)$$

$$\boxed{\vec{u}_\theta = -\sin\theta \, \vec{u}_x + \cos\theta \, \vec{u}_y} \qquad (28)$$

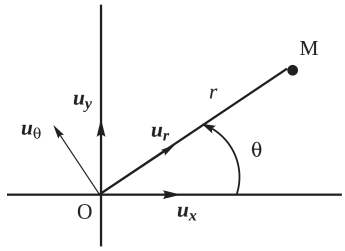
Établissons la formule du vecteur position dans le repère local. On a :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} + \overrightarrow{\mathrm{HM}} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r \, \vec{u}_r + z \, \vec{u}_z} \qquad (29)$$

Cette formule est simple, car elle ne fait pas apparaitre $\cos\theta$ et $\sin\theta$, contrairement à ce qui se passerait en coordonnées cartésiennes. Cette simplicité a une contrepartie, qui est que les vecteurs de base ne sont plus constants. Cependant, la description à l'aide du repère local est plus intéressante, car elle fait apparaitre de façon naturelle la distance à l'axe, qui est un paramètre fondamental en symétrie cylindrique.

## 2.4 Cas d'un mouvement plan.

Si le problème est à symétrie cylindrique mais se déroule dans un unique plan, ce plan est nécessairement orthogonal à $(\Delta)$. Il est alors judicieux de choisir l'origine du repère à l'intersection de ce plan et de l'axe. Le plan du mouvement est alors $(\mathrm{O}, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$, soit encore $(\mathrm{O}, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$.



Avec ce choix, $z = 0$ à tout instant du mouvement, et on se restreint aux seules coordonnées $r$ et $\theta$, qu'on nomme alors souvent **coordonnées polaires** ou **cylindro-polaires**. Le point M a pour coordonnées $(r, \theta)$ et le vecteur position est :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\,\vec{u}_r \tag{30}$$

## 2.5 Vitesse.

On veut maintenant établir l'expression du vecteur vitesse dans le repère local. Soit un point de coordonnées $(r, \theta, z)$ à un instant donné ; le vecteur position correspondant est donné par (29). Par définition :

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(r\,\vec{u}_r)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}(z\,\vec{u}_z)}{\mathrm{d}t} \tag{31}$$

Évaluons le second terme. Comme le vecteur $\vec{u}_z$ est constant, la dérivée est immédiate :

$$\frac{\mathrm{d}(z\,\vec{u}_z)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{u}_z = \dot{z}\,\vec{u}_z \tag{32}$$

Le premier terme est la dérivée d'un produit, donc :

$$\frac{\mathrm{d}(r\,\vec{u}_r)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\vec{u}_r + r\,\frac{\mathrm{d}\vec{u}_r}{\mathrm{d}t} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\frac{\mathrm{d}\vec{u}_r}{\mathrm{d}t} \tag{33}$$

Pour calculer la dérivée du vecteur variable, il faut se ramener à une base fixe, ce qui revient à utiliser l'expression (27). On a :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{u}_r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\cos\theta\,\vec{u}_x + \sin\theta\,\vec{u}_y)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\cos\theta}{\mathrm{d}t}\vec{u}_x + \frac{\mathrm{d}\sin\theta}{\mathrm{d}t}\vec{u}_y \tag{34}$$

L'angle $\theta$ est une fonction du temps $t$, donc les termes $\mathrm{d}\cos\theta/\mathrm{d}t$ et $\mathrm{d}\sin\theta/\mathrm{d}t$ sont mathématiquement des dérivées d'une composée de fonctions. Alors :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{u}_r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}(-\sin\theta)\,\vec{u}_x + \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\cos\theta\,\vec{u}_y = \dot{\theta}\,(-\sin\theta\,\vec{u}_x + \cos\theta\,\vec{u}_y) \tag{35}$$

D'après (28), le terme entre parenthèses correspond au vecteur orthoradial $\vec{u}_\theta$. De la même façon, en utilisant (28), on a :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{u}_\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(-\sin\theta\,\vec{u}_x + \cos\theta\,\vec{u}_y)}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\,(\cos\theta\,\vec{u}_x + \sin\theta\,\vec{u}_y) \tag{36}$$

En définitive, les dérivées des vecteurs de la base locale sont :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{u}_r}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\,\vec{u}_\theta} \tag{37}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{u}_\theta}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\,\vec{u}_r} \tag{38}$$

Remplaçons (37) dans (33), puis injectons (32) et (33) dans (31). Le vecteur vitesse a finalement pour expression :

$$\boxed{\vec{v} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + \dot{z}\,\vec{u}_z} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\vec{v}\left|\begin{array}{l} v_r = \dot{r} \\ v_\theta = r\,\dot{\theta} \\ v_z = \dot{z} \end{array}\right.} \tag{39}$$

## 2.6 Accélération.

La formule de l'accélération s'établit de la même façon. Dérivons le vecteur vitesse par rapport au temps :

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\dot{r}\,\vec{u}_r)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}(r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}(\dot{z}\,\vec{u}_z)}{\mathrm{d}t} \tag{40}$$

Calculons successivement chacun des trois termes. En utilisant (37), le premier terme est :

$$\frac{\mathrm{d}(\dot{r}\,\vec{u}_r)}{\mathrm{d}t} = \ddot{r}\,\vec{u}_r + \dot{r}\,\frac{\mathrm{d}\vec{u}_r}{\mathrm{d}t} = \ddot{r}\,\vec{u}_r + \dot{r}\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta \tag{41}$$

Connaissant (38), le deuxième terme est :

$$\frac{\mathrm{d}(r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta)}{\mathrm{d}t} = \dot{r}\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + r\,\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta + r\,\dot{\theta}\,\frac{\mathrm{d}\vec{u}_\theta}{\mathrm{d}t} = \dot{r}\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + r\,\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta - r\,\dot{\theta}^2\,\vec{u}_r \tag{42}$$

Le vecteur $\vec{u}_z$ étant constant, le troisième terme est :

$$\frac{\mathrm{d}(\dot{z}\,\vec{u}_z)}{\mathrm{d}t} = \ddot{z}\,\vec{u}_z \tag{43}$$

En sommant les trois contributions et en rassemblant les termes, on parvient à l'expression générale de l'accélération en coordonnées cylindriques :

$$\boxed{\vec{a} = (\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2)\,\vec{u}_r + (r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta})\,\vec{u}_\theta + \ddot{z}\,\vec{u}_z} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\vec{a}\left|\begin{array}{l} a_r = \ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta} \\ a_z = \ddot{z} \end{array}\right.} \tag{44}$$

On peut montrer que la composante $a_\theta$ peut s'exprimer sous une forme qui permet parfois de simplifier certains calculs. En effet :

$$r\,a_\theta = r^2\,\ddot{\theta} + 2\,r\,\dot{r}\,\dot{\theta} = r^2 \times \frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}(r^2)}{\mathrm{d}t} \times \dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}(r^2\dot{\theta})}{\mathrm{d}t} \tag{45}$$

On en déduit que :

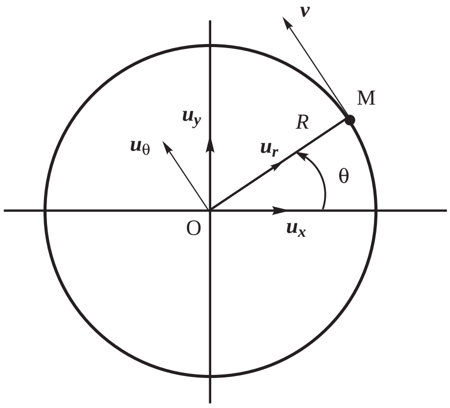
$$\boxed{a_\theta = \frac{1}{r} \times \frac{\mathrm{d}(r^2\dot{\theta})}{\mathrm{d}t}} \tag{46}$$

## 2.7 Mouvement circulaire.

### 2.7.1 Contraintes imposées par un mouvement circulaire.

Il peut arriver que les contraintes physiques imposées au système contraignent le mobile à décrire une trajecoire circulaire : boule accrochée à l'extrémité d'une corde tendue dont l'autre extrémité est fixe, wagonnet circulant sur une portion de rail en arc de cercle, mobile roulant sur une sphère, etc.

Dans ce cas, il existe un point particulier : le centre du cercle qui constitue la trajectoire. Il est évidemment naturel de choisir ce point comme origine O du repère. D'autre part, si le mouvement est circulaire, il est plan. Le problème présente alors une symétrie cylindrique autour de l'axe passant par O et orthogonal au plan de la trajectoire. La base adaptée au problème est alors la base locale $(\mathrm{O}, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ incluse dans le plan du mouvement, et le mobile est commodément repéré par ses coordonnées polaires.




Comme le mouvement est circulaire, le point M reste toujours à une distance constante de O, égale au rayon du cercle. Le vecteur position est donc :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = R\,\vec{u}_r \tag{47}$$

### 2.7.2 Expression de la vitesse et de l'accélération.

La vitesse et l'accélération prennent des formes simples dans le cas d'un mouvement circulaire. En effet, à tout instant, on a :

- $z = 0$ donc $\dot{z} = 0$,
- $r = R$ constant, donc $\dot{r} = 0$.

La vitesse, donnée par (39) se simplifie en :

$$\vec{v} = R\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta \tag{48}$$

Le terme $\dot{\theta}$ correspond à l'angle balayé par le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ par unité de temps. Cette grandeur s'exprime en $\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ ; on l'appelle la **vitesse angulaire**, et on la note usuellement $\omega$ :

$$\boxed{\omega = \dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}} \tag{49}$$

La vitesse angulaire varie au cours du temps dans le cas général. En outre, c'est une grandeur algébrique, dont le signe dépend du sens de rotation : $\omega > 0$ si la trajectoire est parcourue dans le sens des $\theta$ croissants (souvent le sens trigonométrique, mais on peut définir le sens positif comme on veut *a priori*), $\omega < 0$ dans le cas contraire. Avec cette notation, la vitesse du mobile sur la **trajectoire circulaire** exprimée sur la base locale est :

$$\boxed{\vec{v} = R\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta = R\,\omega\,\vec{u}_\theta} \tag{50}$$

La vitesse est selon $\vec{u}_\theta$, donc orthogonale à $\vec{u}_r$ et à $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$. Elle est alors tangente à la trajectoire en M, puisque OM est un rayon du cercle.

Par ailleurs, à tout instant, $\ddot{z} = \ddot{r} = 0$, puisque $\dot{r} = \dot{z} = 0$. L'accélération donnée par (44) se simplifie en :

$$\vec{a} = -R\,\dot{\theta}^2\,\vec{u}_r + R\,\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta = -R\,\omega^2\,\vec{u}_r + R\,\dot{\omega}\,\vec{u}_\theta \tag{51}$$

La composante selon $\vec{u}_r$, donc orthogonale à la trajectoire, est appelé l'**accélération normale** $a_N$. Elle peut s'exprimer en fonction de la vitesse. En effet, d'après (50) :

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = v^2 = R^2\,\dot{\theta}^2 \Rightarrow R\,\dot{\theta}^2 = \frac{v^2}{R} \Rightarrow a_N = -\frac{v^2}{R} \tag{52}$$

En définitive, pour un mouvement circulaire, l'accélération a pour expression dans la base locale :

$$\boxed{\vec{a} \left| \begin{array}{l} a_N = -R\,\dot{\theta}^2 = -\dfrac{v^2}{R} \\ a_T = R\,\ddot{\theta} = R\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \end{array} \right.} \tag{53}$$

La composante de $\vec{a}$ selon $\vec{u}_\theta$, donc tangente à la trajectoire, est appelée l'**accélération tangentielle** $a_T$. Elle peut aussi s'exprimer en fonction de la vitesse. Si on note :

$$\vec{v} = R\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta = v\,\vec{u}_\theta \tag{54}$$

et sachant que $R$ est constant, l'accélération tangentielle est de la forme :

$$a_T = R\,\ddot{\theta} = \frac{\mathrm{d}(R\,\dot{\theta})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{55}$$

Attention ! $v$ n'est pas ici la norme de $\vec{v}$, mais peut être positif ou négatif !

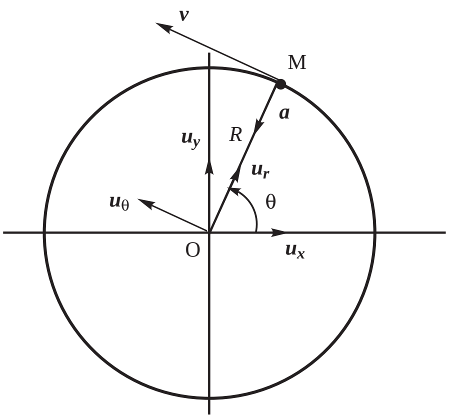
### 2.7.3 Cas du mouvement circulaire uniforme.

Si le mouvement circulaire est tel que $\|\vec{v}\|$ est constant, c'est-à-dire se fait avec une vitesse de valeur constante (mais pas de direction constante, sinon le mouvement serait rectiligne), le mouvement est dit **circulaire uniforme**. La vitesse angulaire est également constante d'après (50) :

$$\omega = \dot{\theta} = \frac{v}{R} = \text{cte} \tag{56}$$

La composante tangentielle de l'accélération est alors nulle car $\ddot{\theta} = 0$, c'est-à-dire que l'accélération est purement normale à la trajectoire :

$$\vec{a} = a_N\,\vec{u}_r = -R\omega^2\,\vec{u}_r = -\frac{v^2}{R}\,\vec{u}_r \tag{57}$$




Déterminons la loi de variation de $\theta$ avec le temps. Supposons que le mobile parte d'un angle $\theta_0$ à la date $t_0$. Comme la vitesse angulaire $\omega$ est constante, on a d'après (49) :

$$\mathrm{d}\theta = \omega\,\mathrm{d}t \Rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta} \mathrm{d}\theta = \omega \int_0^t \mathrm{d}t \Rightarrow \theta = \theta_0 + \omega t \tag{58}$$

L'angle varie donc linéairement avec le temps. Déterminons le temps nécessaire pour faire un tour complet, soit le temps $T$ au bout duquel $\theta = \theta_0 + 2\pi$ ; d'après (58) :

$$\theta_0 + 2\pi = \theta_0 + \omega T \Rightarrow \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}} \tag{59}$$

Si le mouvement est circulaire uniforme, le temps mis pour faire un tour est donc toujours le même à chaque tour ; le mouvement est **périodique** et la **période du mouvement** est $T$. Cela correspond à une fréquence :

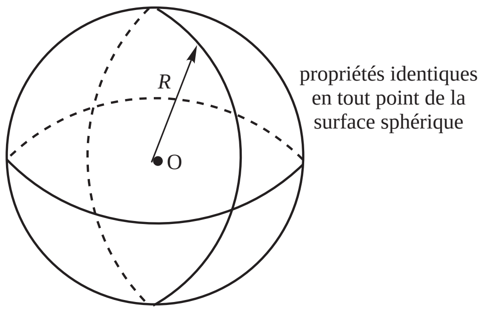
$$\boxed{\nu = \frac{\omega}{2\pi}} \tag{60}$$

# 3 Position en coordonnées sphériques.

## 3.1 Symétrie sphérique.

Un problème est dit à symétrie sphérique s'il existe un point O tel que tout axe passant par O soit un axe de symétrie vis-à-vis des propriétés du problème. On montre alors que tout plan contenant O est un plan de symétrie, et que le point O lui-même est un centre de symétrie.

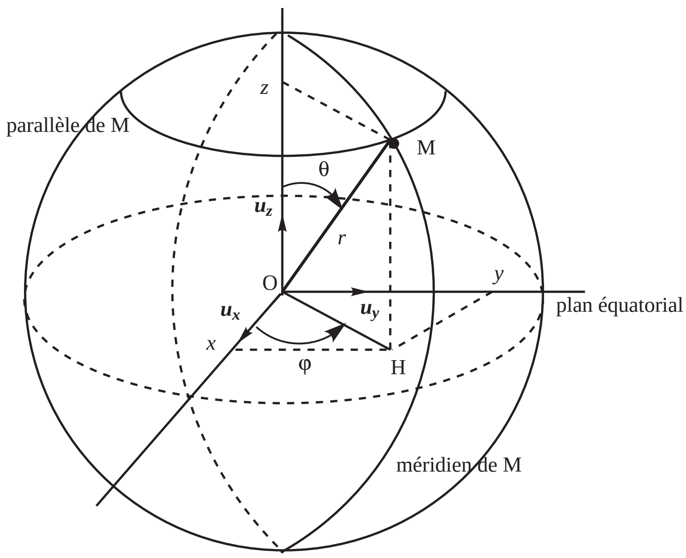
Dans un problème à symétrie sphérique, les propriétés étudiées (masse volumique, potentiel électrique, indice optique, etc) sont identiques en tout point d'une surface sphérique centrée en O.




## 3.2 Repérage d'un point en coordonnées sphériques.

Les coordonnées cartésiennes ne sont pas adaptées à l'étude d'un problème à symétrie sphérique. Si les propriétés sont identiques en tous points équidistants de O, la distance à O doit être un paramètre fondamental du problème. En coordonnées cartésiennes, cette distance a une expression compliquée. D'autre part, les coordonnées cylindriques ne sont pas plus adaptées, puisqu'elles singularisent un axe particulier passant par O, alors qu'en symétrie sphérique, tous les axes passant par O sont équivalents.

Il est alors intéressant d'introduire un nouveau système de coordonnées, dont l'une est la **distance à O**, notée $r$. Une distance $r$ donnée définit une surface sphérique de centre O et de rayon $r$. Elle ne suffit donc pas à repérer un point.




La donnée d'un angle entre un axe particulier et le segment OM restreint les points décrits à un cercle. On définit ainsi l'**angle orienté** $\theta$ entre l'axe $(\mathrm{O}, \vec{u}_z)$ et le segment OM. La donnée de $r$ et $\theta$ définit un cercle centré sur l'axe $(\mathrm{O}, \vec{u}_z)$ et contenant M, le « parallèle » des géographes (pour qui l'axe $(\mathrm{O}, \vec{u}_z)$ est l'axe reliant les pôles).

Le point M est définitivement fixé en repérant le point H, projection orthogonale de M sur le plan $(\mathrm{O}, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ (le « plan équatorial » des géographes) ; ceci peut se faire à l'aide d'un **angle orienté** $\varphi$ entre un axe fixe, par convention $(\mathrm{O}, \vec{u}_x)$ et le segment OH.

En définitive, le point M, de projection orthogonale H sur le plan $(\mathrm{O}, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$, est repéré par ses trois **coordonnées sphériques** :

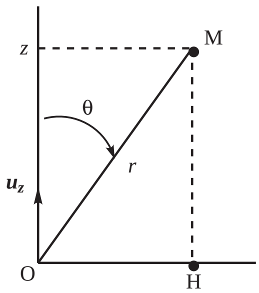
$$\boxed{\begin{cases} r = \mathrm{OM} \\ \theta = (\vec{u}_z, \overrightarrow{\mathrm{OM}}) \\ \varphi = (\vec{u}_x, \overrightarrow{\mathrm{OH}}) \end{cases}} \tag{61}$$

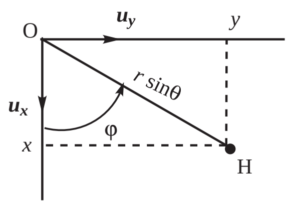
Tous les points de l'espace sont répérés de façon univoque, sauf le point O qui correspond à n'importe quel triplet $(r = 0, \theta, \varphi)$.

Pour pouvoir décrire tous les points de l'espace, il faut :
- parcourir toutes les distances à O, soit $0 \leq r < +\infty$, ce qui définit une demi-droite partant de O et dans une direction donnée par $\theta$ et $\varphi$ ;
- faire varier $\theta$ de $\pi$, soit $0 \leq \theta < \pi$, la demi-droite OM balaye alors un demi-plan appuyé sur l'axe $(\mathrm{O}, \vec{u}_z)$,
- faire pivoter le demi-plan précédent d'un tour complet autour de $(\mathrm{O}, \vec{u}_z)$ , soit $0 \leq \varphi < 2\pi$.

On pourrait aussi choisir $0 \leq \theta < 2\pi$ et $0 \leq \varphi < \pi$, ce qui revient au même, mais ce n'est pas ce choix qui a été fait. L'essentiel est de faire varier un angle de $\pi$ et l'autre de $2\pi$.

Établissons la correspondance entre coordonnées cartésiennes et sphériques. D'une part, considérons le plan défini par $(\mathrm{O}, \vec{u}_z, \overrightarrow{\mathrm{OM}})$.




Il est immédiat que :

$$z = r\,\cos\theta \tag{62}$$
$$\mathrm{OH} = r\,\sin\theta \tag{63}$$

Considérons maintenant le plan $(\mathrm{O}, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$. On a :

$$x = \mathrm{OH}\,\cos\varphi \tag{64}$$
$$y = \mathrm{OH}\,\sin\varphi \tag{65}$$

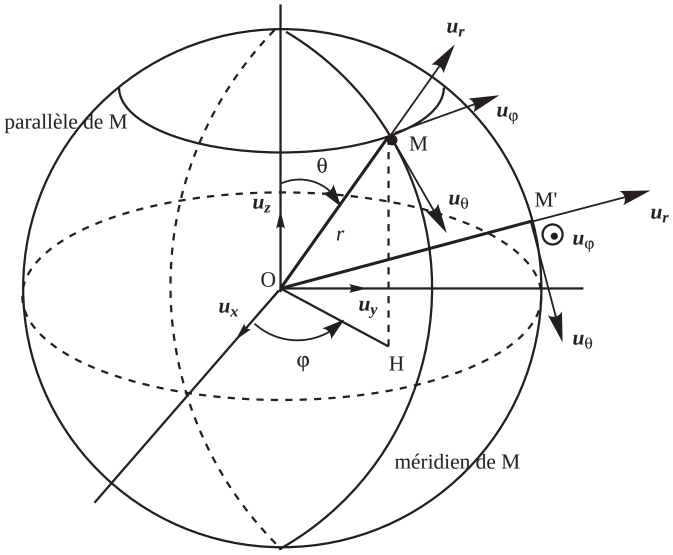
En définitive, les coordonnées cartésiennes s'obtiennent à partir des coordonnées sphériques par le système d'équations :

$$\boxed{\begin{cases} x = r\,\sin\theta\,\cos\varphi \\ y = r\,\sin\theta\,\sin\varphi \\ z = r\,\cos\theta \end{cases}} \tag{66}$$

### 3.3 Repère local en coordonnées sphériques.

Comme en coordonnées cylindriques, il est commode de définir un repère local, qui permet de faire apparaitre les paramètres importants. La distance au point O est le paramètre fondamental en symétrie sphérique ; on définit donc un vecteur unitaire $\vec{u}_r$ colinéaire à $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$. Le vecteur position est alors :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\,\vec{u}_r \tag{67}$$




Les deux autres vecteurs de la base locale doivent varier avec les angles $\theta$ et $\varphi$. Le vecteur unitaire $\vec{u}_\theta$ est tangent au méridien en M, et le vecteur unitaire $\vec{u}_\varphi$ est tangent au parallèle en M. Ils sont tous les deux orientés dans le même sens que les angles correspondant.

Dans la base locale $(\mathrm{O}, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$, l'expression du vecteur position est très simple ; en contrepartie, les vecteurs de base ne sont pas constants. Il est possible de calculer les vecteurs vitesse et accélération dans la base locale, mais les expressions sont très compliquées et ne sont pas au programme.