



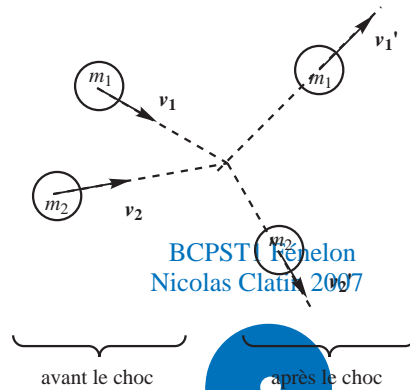
# 1 Énoncé

## 1.1 Quantité de mouvement

On considère un solide indéformable ponctuel, de masse  $m$ , et animé d'une vitesse  $\vec{v}$  petite devant celle de la lumière. La quantité de mouvement de l'objet est par définition la grandeur vectorielle :

$$\boxed{\vec{p} = m \vec{v}} \quad (1)$$

L'intérêt de cette grandeur est que, contrairement à la masse ou à la vitesse, elle se conserve : c'est un invariant au cours d'une transformation d'un système physique. Soit par exemple deux boules de masse  $m_1$  et  $m_2$ , animées de vitesses  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$ , qui entrent en collision ; leurs vitesses après le choc sont  $\vec{v}'_1$  et  $\vec{v}'_2$ .



La quantité de mouvement du système total se conservant, on a :

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 \Rightarrow m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2 \quad (2)$$

La quantité de mouvement est une grandeur fondamentale en physique des particules ou en relativité, deux domaines dans lesquels la masse ne se conserve pas lorsque la vitesse est proche de celle de la lumière. Dans le cadre du programme, la masse des systèmes est supposée constante.

certains droits réservés  
ne peut pas être vendu

## 1.2 Énoncé du principe fondamental de la dynamique

Soit un objet ponctuel de masse  $m$  et de vitesse  $\vec{v}$ . Dans le cas où sa **masse est constante**, la variation temporelle de sa quantité de mouvement est :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \vec{a} \quad (3)$$

Supposons que l'objet précédent soit soumis à un ensemble de forces extérieures dont la somme est  $\vec{F}_{\text{ext}}$ . Le **principe fondamental de la dynamique** (ou deuxième loi de Newton) postule que :

dans un référentiel galiléen, la variation temporelle de la quantité de mouvement d'un solide ponctuel est égale à la somme des forces extérieures qui lui sont appliquées.

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \vec{a} = \vec{F}_{\text{ext}}} \quad (4)$$

On a vu que l'accélération est la même dans deux référentiels galiléens en translation, donc la somme des forces l'est aussi ; le principe fondamental de la dynamique est invariant par changement de référentiel galiléen. Dans les référentiels non galiléens, il faut ajouter des termes supplémentaires, appelés les *forces d'inertie*.

### 1.3 Conséquences

On peut tirer trois conséquences immédiates du principe fondamental de la dynamique. Premièrement, si la somme des forces appliquées est nulle, on a :

$$\vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0} \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \vec{c}te \quad (5)$$

autrement dit, le mouvement est rectiligne uniforme ; on retrouve le **principe d'inertie**. Inversement, si la somme des forces extérieures n'est pas nulle, on a :

$$\vec{F}_{\text{ext}} \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{v} \neq \vec{c}te \quad (6)$$

c'est-à-dire que le vecteur vitesse évolue au cours du temps. Cette évolution peut concerner la norme (la valeur de la vitesse change), la direction (la direction du mouvement change) ou les deux.

D'autre part, si le solide ponctuel est au repos, on a nécessairement :

$$\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0} \quad (7)$$

c'est-à-dire qu'un solide ne peut être au repos (dans le référentiel d'étude) que si la somme des forces qu'il subit est nulle. Attention ! cette condition est nécessaire, mais pas suffisante, comme le montre le principe d'inertie.

### 1.4 Cas d'un objet non ponctuel

On peut montrer que, pour un solide non ponctuel indéformable, de masse totale constante  $m$  et de centre de masse  $G$ , dans un référentiel galiléen, le **théorème du centre d'inertie** s'applique :


$$m \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}} \quad (8)$$

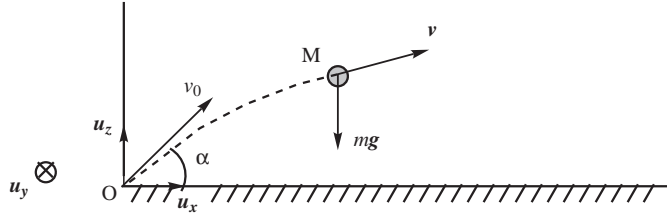
Ce théorème est toujours valable. Dans le cas où aucun mouvement de rotation du système n'intervient, le théorème du centre d'inertie revient à dire que tout se passe comme si la masse totale du solide était concentrée en un point unique, le centre d'inertie.

D'une façon générale, aucun mouvement de rotation n'est au programme en BCPST. En conséquence, le théorème du centre d'inertie se confond avec le principe fondamental de la dynamique. L'étude des mouvements de rotation nécessite l'introduction d'une grandeur supplémentaire, le moment cinétique, dont la variation temporelle est liée à la somme des moments des forces appliquées.

## 2 Exemple du tir d'un projectile

### 2.1 Trajectoire en l'absence de frottement

On considère un projectile de masse  $m$ , assimilable à un objet ponctuel, lancé avec une vitesse initiale  $\vec{v}_0$  faisant un angle  $\alpha$  avec le sol, supposé horizontal. On cherche l'équation du mouvement et le lieu de la chute du projectile.



#### 2.1.1 Choix du repère

On se place dans le référentiel terrestre, supposé galiléen. Le problème ne présentant ni symétrie cylindrique ni symétrie sphérique, on raisonne en coordonnées cartésiennes. Afin de simplifier les équations, et sans restreindre la généralité du problème, on peut choisir comme origine du repère le lieu du tir, c'est-à-dire la position du projectile à l'instant  $t = 0$ . Les coordonnées du système à l'instant initial sont alors :

$$\vec{OM}_0 = \vec{OO} \quad \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases} \quad (9)$$

D'autre part, le plan horizontal (celui du sol) va sans doute jouer un rôle particulier. En outre, le vecteur vitesse initiale  $\vec{v}_0$  est inclus dans un plan vertical. Il est judicieux de choisir les vecteurs de base de sorte à faire apparaître ces plans. On choisit donc par exemple  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_y$  dans le plan horizontal et  $\vec{u}_z$  selon la verticale, de sorte que  $\vec{v}_0$  soit dans le plan  $(\vec{u}_x, \vec{u}_z)$ . La vitesse initiale est alors de la forme :

$$\vec{v}_0 = \begin{cases} v_{x0} = v_0 \cos \alpha \\ v_{y0} = 0 \\ v_{z0} = v_0 \sin \alpha \end{cases} \quad (10)$$

#### 2.1.2 Équation de la trajectoire

Si on néglige les frottements fluides dus à l'air, la seule force appliquée est le poids. Le principe fondamental de la dynamique s'écrit alors :

$$m \vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \vec{g} \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} \quad (11)$$

Séparons les variables, et intégrons la relation vectorielle entre l'instant initial, pour lequel la vitesse est  $\vec{v}_0$ , et un instant quelconque, pour lequel elle vaut  $\vec{v}$ . Sachant que  $\vec{g}$  est un vecteur constant, on a :

$$\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d\vec{v} = \int_0^t \vec{g} dt = \vec{g} \int_0^t dt \Rightarrow \vec{v} - \vec{v}_0 = \vec{g}t \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t \quad (12)$$

Intégrons une deuxième fois pour obtenir le vecteur position en fonction du temps, sachant qu'il est nul à l'instant initial. Les vecteurs  $\vec{v}_0$  et  $\vec{g}$  étant constant, on a :

$$\frac{d\vec{OM}}{dt} = \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t \Rightarrow \int_{\vec{O}}^{\vec{OM}} d\vec{OM} = \int_0^t (\vec{v}_0 + \vec{g}t) dt = \vec{v}_0 \int_0^t dt + \vec{g} \int_0^t t dt \Rightarrow \vec{OM} = \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{g}t^2 \quad (13)$$

En projetant sur les axes du repère, on en déduit les coordonnées du projectile en fonction du temps :

$$\begin{cases} x = v_0 \cos \alpha t \\ y = 0 \\ z = v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \quad (14)$$

Le même résultat peut être obtenu par projection du principe fondamental de la dynamique, suivie de deux intégrations, suivant chacun des trois axes. Projetons (11) :

$$\begin{cases} a_x = dv_x/dt = 0 \\ a_y = dv_y/dt = 0 \\ a_z = dv_z/dt = -g \end{cases} \quad (15)$$

Intégrons après séparation des variables et en utilisant la condition initiale (10) :

$$\begin{cases} \int_{v_{x0}}^{v_x} dv_x = \int_0^t 0 \times dt \\ \int_{v_{y0}}^{v_y} dv_y = \int_0^t 0 \times dt \\ \int_{v_{z0}}^{v_z} dv_z = \int_0^t -g dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x - v_{x0} = 0 \\ v_y - v_{y0} = 0 \\ v_z - v_{z0} = -gt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = dx/dt = v_{x0} = v_0 \cos \alpha \\ v_y = dy/dt = v_{y0} = 0 \\ v_z = dz/dt = v_{z0} - gt = v_0 \sin \alpha - gt \end{cases} \quad (16)$$

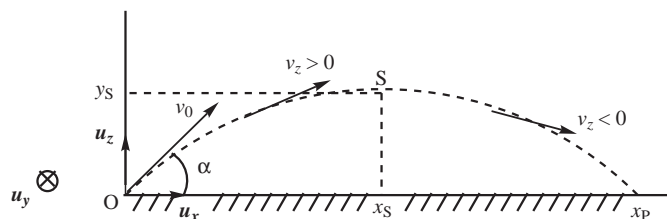
Une seconde intégration, en utilisant la condition initiale (9), conduit au système (14) :

$$\begin{cases} \int_{x_0}^x dx = \int_0^t v_0 \cos \alpha dt \\ \int_{y_0}^y dy = \int_0^t 0 \times dt \\ \int_{z_0}^z dz = \int_0^t (v_0 \sin \alpha - gt) dt \end{cases} \quad (17)$$

Le système (14) constitue le système d'équations paramétriques de la trajectoire :  $(x(t), y(t), z(t))$ . L'équation cartésienne s'obtient en éliminant le temps entre les trois équations, ce qui se fait en exprimant  $t$  en fonction de  $x$  et en reportant dans l'expression de  $z$  :

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \Rightarrow z = x \tan \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 \quad (18)$$

Ceci est l'équation d'une parabole concave d'axe vertical; le mouvement est donc parabolique. En outre, il se déroule dans le plan  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$ .



### 2.1.3 Sommet de la trajectoire

Dans la première partie de la trajectoire, le projectile monte, c'est-à-dire que la composante verticale de la vitesse est positive :  $v_z > 0$ . Après le sommet de la trajectoire, le projectile descend, ce qui correspond à  $v_z < 0$ . Comme la vitesse est continue, et en utilisant (16), on en déduit que le sommet de la trajectoire est atteint à la date  $t_S$  telle que :

$$v_z = 0 \Rightarrow v_0 \sin \alpha - gt_S = 0 \Rightarrow t_S = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \quad (19)$$

En reportant dans (14), on obtient les coordonnées du sommet de la trajectoire, qui sont celles du point le plus élevé atteint par le projectile :

$$\begin{cases} x_S = \frac{v_0^2 \cos \alpha \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} \\ y_S = 0 \\ z_S = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g} - \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \end{cases} \quad (20)$$

Pour un projectile donné, comment faut-il le tirer pour l'envoyer le plus haut possible ? Il est évident que  $z_S$  est maximal si  $\sin \alpha$  est maximal, soit  $\alpha = \pi/2$ . C'est donc avec un tir vertical qu'on atteint l'altitude la plus élevée.

### 2.1.4 Portée du tir

La portée du tir correspond à la distance entre le lieu du tir et le lieu où le projectile atteint le sol. Cette position correspond à  $z = 0$ . En utilisant (18), évaluons l'abscisse de ce point :

$$z = 0 \Rightarrow x \left( \tan \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x \right) = 0 \quad (21)$$

La première solution  $x = 0$ , correspond au lieu du tir. La deuxième solution correspond à l'abscisse  $x_P$  du lieu où le projectile retombe, qui est aussi la distance parcourue selon l'axe horizontal (car  $x_0 = 0$ ) :

$$\tan \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x_P = 0 \Rightarrow x_P = \frac{2v_0^2 \cos^2 \alpha \tan \alpha}{g} = \frac{2v_0^2 \cos \alpha \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = L \quad (22)$$

La portée du tir vérifie donc  $x_P = 2x_S$ , ce qui est attendu par symétrie. La portée est maximale si  $x_P$  est maximal, soit si  $\sin 2\alpha$  est maximal. Ceci correspond à  $2\alpha = \pi/2$  soit  $\alpha = \pi/4$ . La portée est maximale si on effectue un tir à  $45^\circ$ .

## 2.2 Influence de la résistance de l'air

### 2.2.1 Modélisation de la force de frottement fluide

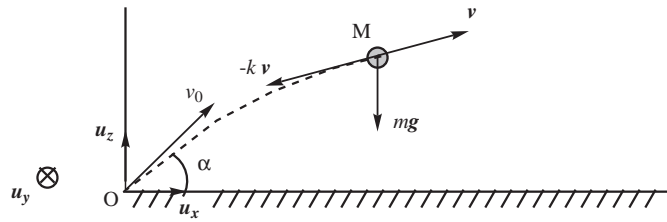
Tant que les vitesses restent faibles et si le fluide est peu visqueux, la force de frottement exercée sur le projectile est opposée à son mouvement et proportionnelle à la vitesse, soit :

$$\vec{F} = -k \vec{v} \quad (23)$$

où  $k$  est un coefficient positif, qui dépend de la nature du fluide, du solide et de la surface de contact. Le principe fondamental de la dynamique s'écrit maintenant :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \vec{g} - k \vec{v} \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{k}{m} \vec{v} = \vec{g} \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \vec{g} \quad (24)$$

où  $\tau = m/k$  est la constante de temps du mouvement.



### 2.2.2 Détermination de la vitesse

L'équation (24) est une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants. La solution  $\vec{v}_1$  de l'équation homogène est :

$$\frac{d\vec{v}_1}{dt} + \frac{\vec{v}_1}{\tau} = 0 \Rightarrow \vec{v}_1 = \vec{A} e^{-t/\tau} \quad (25)$$

où  $\vec{A}$  est un vecteur constant. On peut chercher une solution particulière  $\vec{v}_2$  constante :

$$\frac{d\vec{v}_2}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{\vec{v}_2}{\tau} = \vec{g} \Rightarrow \vec{v}_2 = \tau \vec{g} \quad (26)$$

La vitesse est donc de la forme :

$$\vec{v} = \vec{A} e^{-t/\tau} + \tau \vec{g} \quad (27)$$

Le vecteur  $\vec{A}$  est déterminé à l'aide d'une condition à la limite. À l'instant initial  $t = 0$ , la vitesse est  $\vec{v}_0$  ; en reportant dans (27), on a alors :

$$\vec{v}_0 = \vec{A} + \tau \vec{g} \Rightarrow \vec{A} = \vec{v}_0 - \tau \vec{g} \quad (28)$$

En définitive, la vitesse du mobile a pour expression :

$$\vec{v} = (\vec{v}_0 - \tau \vec{g}) e^{-t/\tau} + \tau \vec{g} \quad (29)$$

### 2.2.3 Équation de la trajectoire

Intégrons l'équation (29) pour obtenir le vecteur position, sachant qu'à l'instant  $t = 0$ , le projectile se trouve en O :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = (\vec{v}_0 - \tau \vec{g}) e^{-t/\tau} + \tau \vec{g} \Rightarrow \int_{\vec{0}}^{\overrightarrow{OM}} d\overrightarrow{OM} = \int_0^t (\vec{v}_0 - \tau \vec{g}) e^{-t/\tau} dt + \int_0^t \tau \vec{g} dt \quad (30)$$

Les vecteurs  $\vec{v}_0$  et  $\vec{g}$  étant constants, l'intégration donne facilement :

$$\overrightarrow{OM} = -\tau (\vec{v}_0 - \tau \vec{g}) (e^{-t/\tau} - 1) + \tau \vec{g} t \quad (31)$$

En projetant sur les trois axes, on obtient les coordonnées du projectile en fonction du temps :

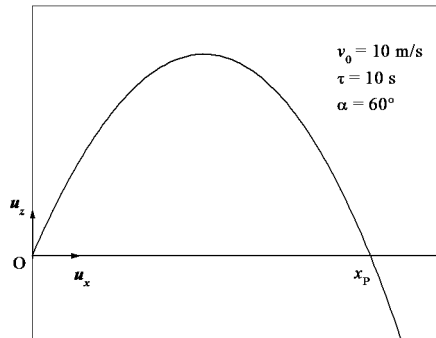
$$\begin{cases} x = \tau v_0 \cos \alpha (1 - e^{-t/\tau}) \\ y = 0 \\ z = \tau (v_0 \sin \alpha + \tau g) (1 - e^{-t/\tau}) - \tau g t \end{cases} \quad (32)$$

Comme on peut le constater par comparaison avec (14), le mouvement est totalement différent. Il est possible de déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire en éliminant le temps. On a d'une part :

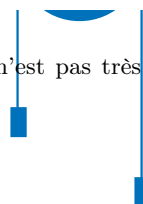
$$x = \tau v_0 \cos \alpha \left(1 - e^{-t/\tau}\right) \Rightarrow 1 - e^{-t/\tau} = \frac{x}{\tau v_0 \cos \alpha} \Rightarrow t = -\tau \ln \left(1 - \frac{x}{\tau v_0 \cos \alpha}\right) \quad (33)$$

En reportant dans l'expression de  $z$ , on obtient l'équation cartésienne de la trajectoire :

$$z = \frac{(v_0 \sin \alpha + \tau g) x}{v_0 \cos \alpha} + \tau^2 g \ln \left(1 - \frac{x}{\tau v_0 \cos \alpha}\right) \quad (34)$$



Il apparait en pratique que l'allure de cette courbe n'est pas très éloignée de celle d'une parabole, même si leurs équations sont très différentes.



### 2.2.4 Portée du tir

Le point d'impact du projectile correspond à  $z = 0$ ; l'abscisse correspondant est solution de l'équation :

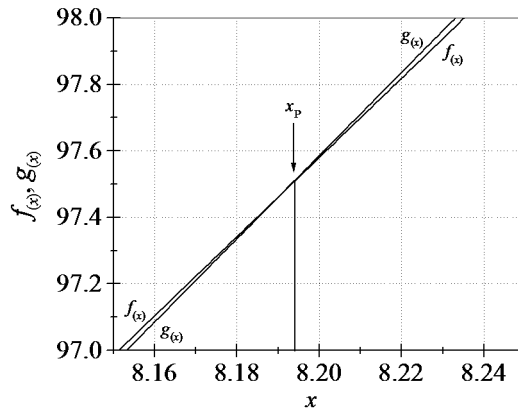
$$z = 0 \Rightarrow \frac{(v_0 \sin \alpha + \tau g) x}{v_0 \cos \alpha} + \tau^2 g \ln \left(1 - \frac{x}{\tau v_0 \cos \alpha}\right) = 0 \quad (35)$$

Cette équation n'a pas de solution analytique. On peut en faire une résolution graphique. En effet, la relation peut s'écrire :

$$\underbrace{\frac{(v_0 \sin \alpha + \tau g) x}{v_0 \cos \alpha}}_{f(x)} = \underbrace{-\tau^2 g \ln \left(1 - \frac{x}{\tau v_0 \cos \alpha}\right)}_{g(x)} \quad (36)$$

La solution se trouve graphiquement à l'intersection des courbes représentatives des fonctions  $f(x)$  et  $g(x)$ . On les a tracées ci-dessous pour les mêmes valeurs numériques qu'au schéma précédent ; on constate que les courbes sont très proches, et qu'il faut faire un agrandissement au niveau de l'intersection.





Il est bien entendu également possible de faire une résolution numérique à la machine. On peut cependant remarquer que, pour des temps très grands, soit  $t \rightarrow \infty$ , on a :

$$x \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \tau v_0 \cos \alpha \quad (37)$$

$$z \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} -\infty \quad (38)$$

ce qui caractérise le fait que la courbe donnée par l'équation (34) possède une asymptote verticale pour  $x = \tau v_0 \cos \alpha$ . En conséquence, l'abscisse du projectile ne peut pas être supérieure à cette valeur ; la portée est nécessairement inférieure à cette valeur.

On peut remarquer que la portée dépend de la masse du projectile (car  $\tau = m/k$ ), contrairement au cas où les frottements étaient négligés.

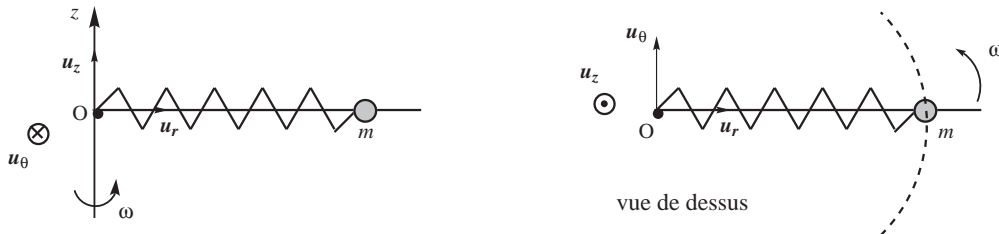
Il est bien évident que la limite  $z \rightarrow -\infty$  n'a pas de sens physique : si la fonction d'équation (34) peut diverger, la valeur physique de  $z$  ne peut être que positive.

certains droits réservés  
ne peut pas être vendu

### 3 Exemple d'un mouvement circulaire

#### 3.1 Étude du mouvement dans le repère tournant

On considère une tige horizontale sans masse tournant à la vitesse angulaire constante  $\omega$  autour d'un axe vertical  $(O, \vec{u}_z)$ . Sur cette tige est enfilée un ressort sans masse, de constante de raideur  $k$  et de longueur à vide  $L_0$ , à l'extrémité duquel est accroché un petit anneau de masse  $m$ . On appelle  $M$  la position de l'anneau. Il n'y a aucun frottement entre le ressort ou l'anneau et la tige.



##### 3.1.1 Position, vitesse et accélération

On se place dans le référentiel terrestre assimilable à un référentiel galiléen. Dans ce problème, le point  $M$  réalise un mouvement tournant autour de l'axe vertical. On choisit donc de travailler dans la base locale  $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ .

Soit  $x$  l'allongement algébrique du ressort ( $x > 0$  si le ressort est allongé et  $x < 0$  s'il est comprimé); la longueur du ressort vaut alors :

$$L = L_0 + x \quad (39)$$

En conséquence, le vecteur position dans la base locale  $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$  s'écrit :

$$\vec{OM} = r \vec{u}_r = (L_0 + x) \vec{u}_r \quad (40)$$

En se rappelant que la vitesse angulaire est  $\omega = \dot{\theta}$ , le vecteur vitesse s'écrit :

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta = \dot{x} \vec{u}_r + (L_0 + x) \omega \vec{u}_\theta \quad (41)$$

D'autre part, comme la vitesse angulaire est constante,  $\ddot{\theta} = 0$ , et le vecteur accélération a pour expression :

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \vec{u}_\theta = (\ddot{x} - r\omega^2) \vec{u}_r + 2\dot{x}\omega \vec{u}_\theta = (\ddot{x} - (L_0 + x)\omega^2) \vec{u}_r + 2\dot{x}\omega \vec{u}_\theta \quad (42)$$

##### 3.1.2 Écriture du principe fondamental de la dynamique

Trois forces s'exercent sur la masse  $m$  :

- son poids  $m\vec{g}$ ,
- la réaction de la tige  $\vec{R}$  qui est orthogonale à la tige (donc à  $\vec{u}_r$ ) car il n'y a pas de frottement,
- la force de rappel du ressort.

La force de rappel du ressort est proportionnelle à l'allongement :

$$\vec{F} = -kx \vec{u}_r \quad (43)$$

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$m\vec{a} = \vec{F} + m\vec{g} + \vec{R} \quad (44)$$

Projetons suivant les trois axes, sans oublier que  $\vec{R}$ , étant orthogonale à  $\vec{u}_r$ , possède *a priori* une composante suivant  $\vec{u}_\theta$  et une composante suivant  $\vec{u}_z$  :

$$m(\ddot{x} - (L_0 + x)\omega^2) = -kx \Leftrightarrow \ddot{x} + \left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)x = L_0\omega^2 \quad (45)$$

$$2\dot{x}\omega = R_\theta \quad (46)$$

$$0 = R_z - mg \quad (47)$$

### 3.1.3 Longueur d'équilibre du ressort

Il arrive un moment où le ressort parvient à une longueur d'équilibre, c'est-à-dire que son allongement ne varie plus. Cela correspond à  $x$  constant, et donc à  $\dot{x} = \ddot{x} = 0$ . L'équation (45) devient :

$$\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)x = L_0\omega^2 \Rightarrow x_{\text{eq}} = \frac{L_0\omega^2}{\frac{k}{m} - \omega^2} \quad (48)$$

Si  $\omega = \sqrt{k/m}$ , alors l'expression précédente n'est plus valable, la valeur de  $x_{\text{eq}}$  diverge, autrement dit, il n'y a pas de position d'équilibre possible. D'autre part, l'équation (45) devient :

$$\ddot{x} = L_0\omega^2 \quad (49)$$

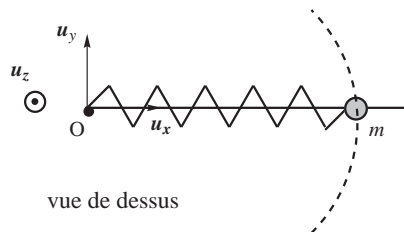
Ceci signifie que l'anneau s'éloigne de plus en plus de O. Physiquement, le ressort s'allonge jusqu'à la rupture, et la masse  $m$  est éjectée. C'est un cas de résonance mécanique.

En réalité, les choses sont plus complexes, car la force de rappel du ressort n'est proportionnelle à  $x$  que pour les faibles allongements. Lorsque l'allongement est trop grand, le ressort perd son élasticité (il se déforme de façon irréversible), et l'équation (6) n'est alors plus valable. Si  $\omega = \sqrt{k/m}$ , on observe donc en réalité un allongement irréversible du ressort, qui peut éventuellement mener à la rupture.

Notons également que lorsque l'allongement du ressort devient constant, c'est-à-dire lorsque la masse  $m$  ne coulisse plus le long de la tige, la réaction de celle-ci n'a plus de composante suivant  $\vec{u}_\theta$  ; en effet (46) s'écrit alors :  $0 = R_\theta$ . La réaction de la tige se limite à compenser le poids de la masse  $m$ .

## 3.2 Forces d'inertie

Considérons un observateur qui serait lié au point M. Celui-ci aurait l'impression d'être soumis à un mouvement rectiligne suivant l'axe de la tige. Cet observateur raisonne dans un référentiel (R') lié à la tige, et définit une base  $(O, \vec{u}'_x, \vec{u}'_y, \vec{u}'_z)$ , avec par exemple  $\vec{u}'_x$  suivant la tige, soit  $\vec{u}'_x = \vec{u}_r$ .



Dans le référentiel lié à la tige, pour lequel  $\vec{u}_x$  est un vecteur constant, la position, la vitesse et l'accélération de M s'écrivent :

$$\overrightarrow{OM} = (L_0 + x) \vec{u}'_x \quad (50)$$

$$\vec{v}_{(R')} = \dot{x} \vec{u}'_x \quad (51)$$

$$\vec{a}_{(R')} = \ddot{x} \vec{u}'_x \quad (52)$$

Quelle est la différence avec le point de vue précédent ? L'observateur lié à la tige utilise les mêmes vecteurs de base que dans le cas précédent :  $\vec{u}'_x = \vec{u}_r$  et  $\vec{u}'_y = \vec{u}_\theta$  ; en revanche, dans sa perception, les vecteurs de base sont constants, alors qu'en réalité, ils sont en rotation autour de l'axe  $\vec{u}_z$ . Le référentiel lié à la tige est en fait en rotation par rapport au référentiel terrestre ; en conséquence, il n'est pas galiléen. Dans ce cas, l'application du principe fondamental de la dynamique doit se faire en rajoutant des termes appelés **forces d'inertie**.

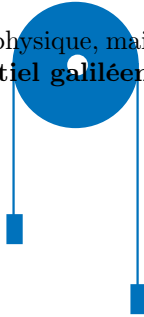
Dans le référentiel terrestre (R), en combinant (42) et (44), on a :

$$m(\ddot{x} - (L_0 + x)\omega^2) \vec{u}_r + 2m\dot{x}\omega \vec{u}_\theta = \vec{F} + m\vec{g} + \vec{R} \quad (53)$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{(R')} = m\ddot{x} \vec{u}'_x = \vec{F} + m\vec{g} + \vec{R} + m(L_0 + x)\omega^2 \vec{u}'_x - 2m\dot{x}\omega \vec{u}'_y \quad (54)$$

On reconnaît à gauche l'accélération dans le référentiel non galiléen. Les termes  $(L_0 + x)\omega^2 \vec{u}'_x$  et  $-2m\dot{x}\omega \vec{u}'_y$  correspondent aux forces d'inertie.

Les forces d'inertie ne sont pas des actions au sens physique, mais leur effet est cependant bien réel. On retiendra de cet exemple que **raisonner dans un référentiel galiléen en utilisant une base locale tournante permet de s'affranchir des forces d'inertie**.



certains droits réservés  
ne peut pas être vendu