MÉCANIQUE

chapitre 7

Énergie des systèmes mécaniques

La notion d'énergie est assez délicate à définir. On constate qu'il existe certaines grandeurs qui se conservent au cours des processus physiques : la quantité de mouvement en est une. L'énergie est également globalement invariante ; cependant elle peut revêtir de nombreuses formes, entre lesquelles elle peut se répartir. En mécanique, les systèmes en mouvement possèdent de l'énergie dite cinétique ; soumis à une interaction susceptible de les mettre en mouvement, ils possèdent également de l'énergie dite potentielle. Comme on l'a vu en thermodynamique, les échanges d'énergie associés à un déplacement d'ensemble (ce qui est le cas des systèmes mécaniques) se font sous forme de travail.

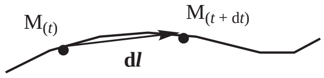
Plan du chapitre.

1. Travail d'une force
   1.1 Définition du travail élémentaire
   1.2 Travail le long d'une courbe
   1.3 Exemples importants
2. Théorème de l'énergie cinétique
   2.1 Énergie cinétique
   2.2 Théorème de l'énergie cinétique
   2.3 Travail moteur et travail résistant
   2.4 Exemple d'application
3. Énergie potentielle
   3.1 Définition de l'énergie potentielle
   3.2 Interprétation physique
   3.3 Exemples importants
4. Énergie mécanique
   4.1 Conservation de l'énergie mécanique
   4.2 Cas des forces non conservatives
   4.3 État de diffusion et état lié

1 Travail d'une force.

1.1 Définition du travail élémentaire.

Considérons un mobile ponctuel M se déplaçant le long de sa trajectoire. Pendant un intervalle de temps infinitésimal $\mathrm{d}t$, il se déplace du point $\mathrm{M}_{(t)}$ au point $\mathrm{M}_{(t+\mathrm{d}t)}$. Si $\mathrm{d}t$ est très petit, l'arc de trajectoire parcouru est assimilable à une droite.



On appelle **vecteur déplacement élémentaire** le vecteur :

$$\mathrm{d}\vec{\ell} = \overrightarrow{\mathrm{M}_{(t)}\mathrm{M}_{(t+\mathrm{d}t)}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}}_{(t+\mathrm{d}t)} - \overrightarrow{\mathrm{OM}}_{(t)} \tag{1}$$

Le terme de droite correspond donc à la variation élémentaire du vecteur position $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ pendant l'intervalle de temps $\mathrm{d}t$, soit :

$$\boxed{\mathrm{d}\vec{\ell} = \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \vec{v}\,\mathrm{d}t} \tag{2}$$

puisque $\vec{v} = \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}/\mathrm{d}t$.

On appelle **travail élémentaire** de la force $\vec{F}$ s'appliquant sur le point matériel M pendant l'intervalle de temps $\mathrm{d}t$ la grandeur :

$$\boxed{\delta W_{\vec{F}} = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = \vec{F}\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}t} \tag{3}$$

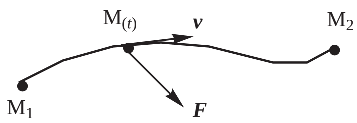
La puissance instantanée de la force $\vec{F}$ s'appliquant sur M animé de la vitesse $\vec{v}$ entre l'instant t et l'instant $t+\mathrm{d}t$ est :

$$\boxed{\mathcal{P} = \frac{\delta W_{\vec{F}}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}\cdot\vec{v}} \tag{4}$$

Le travail élémentaire est homogène à une énergie ; il s'exprime donc en J. La puissance est une énergie par unité de temps, en W. D'un point de vue physique, le travail élémentaire représente l'énergie reçue (algébriquement) par le mobile sous l'effet de la force. On reviendra sur ce point au paragraphe 2.

1.2 Travail le long d'une courbe.

Le mobile se déplace maitenant le long d'une courbe macroscopique entre le point M_1 et le point M_2. La vitesse et la force ne sont *a priori* pas constantes le long de la trajectoire. Le travail total de la force $\vec{F}$ s'obtient par intégration :



$$\boxed{W_{\vec{F}\,\mathrm{M}_1\to\mathrm{M}_2} = \int_{\mathrm{M}_1}^{\mathrm{M}_2} \delta W_{\mathrm{F}} = \int_{\mathrm{M}_1}^{\mathrm{M}_2} \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = \int_{\mathrm{M}_1}^{\mathrm{M}_2} \vec{F}\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}t} \tag{5}$$

Pour intégrer, il faut exprimer la quantité sous l'intégrale. En coordonnées cartésiennes, le déplacement élémentaire en un point $\mathrm{M}(x, y, z)$ de la trajectoire est :

$$\mathrm{d}\vec{\ell} = \mathrm{d}(x\,\vec{u}_x + y\,\vec{u}_y + z\,\vec{u}_z) \Rightarrow \boxed{\mathrm{d}\vec{\ell} = \mathrm{d}x\,\vec{u}_x + \mathrm{d}y\,\vec{u}_y + \mathrm{d}z\,\vec{u}_z} \tag{6}$$

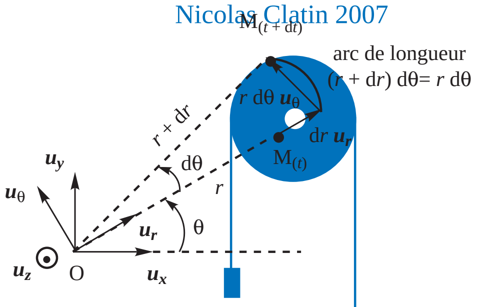
car les vecteurs de base sont constants. Si la force a pour composantes (F_x, F_y, F_z) dans la base cartésienne, le produit scalaire s'écrit :

$$\delta W_{\vec{F}} = F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y + F_z \mathrm{d}z \Rightarrow W_{\vec{F}\,\mathrm{M}_1 \to \mathrm{M}_2} = \int_{\mathrm{M}_1}^{\mathrm{M}_2} F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y + F_z \mathrm{d}z \tag{7}$$

En coordonnées cylindriques, le déplacement élémentaire en un point $\mathrm{M}(r, \theta, z)$ de la trajectoire est de la forme :

$$\mathrm{d}\vec{\ell} = \mathrm{d}(r\,\vec{u}_r + z\,\vec{u}_z) \Rightarrow \boxed{\mathrm{d}\vec{\ell} = \mathrm{d}r\,\vec{u}_r + r\mathrm{d}\theta\,\vec{u}_\theta + \mathrm{d}z\,\vec{u}_z} \tag{8}$$

Physiquement, cela correspond à un déplacement selon les trois directions du repère :
- un déplacement de $\mathrm{d}r$ suivant la direction $\vec{u}_r$;
- un déplacement assimilable à la portion de courbe $(r + \mathrm{d}r)\,\mathrm{d}\theta$ selon la direction u_θ, soit, en négligeant le produit $\mathrm{d}r \times \mathrm{d}\theta$ (terme du deuxième ordre), un déplacement de $r\,\mathrm{d}\theta$ selon $\vec{u}_\theta$;
- un déplacement de $\mathrm{d}z$ suivant la direction $\vec{u}_z$;



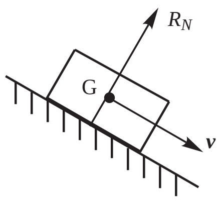
Les composantes de la force dans la base locale étant (F_r, F_θ, F_z), le travail de la force $\vec{F}$ s'écrit :

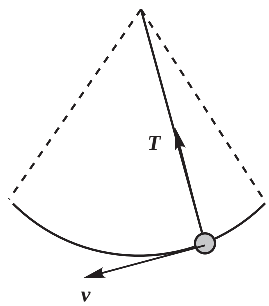
$$W_{\vec{F}\,\mathrm{M}_1 \to \mathrm{M}_2} = \int_{\mathrm{M}_1}^{\mathrm{M}_2} F_r\,\mathrm{d}r + r\,F_\theta\,\mathrm{d}\theta + F_z\,\mathrm{d}z \tag{9}$$

1.3 Exemples importants.

1.3.1 Force orthogonale à la trajectoire en tout point.

C'est le cas de la composante normale de la réaction d'un support sur un solide, ou de la tension du fil tendu d'un pendule.





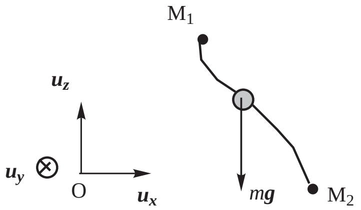
Dans ce cas, en tout point de la trajectoire, on a $\vec{F} \perp \vec{v}$, soit, sur tout intervalle de temps $\mathrm{d}t$ durant le mouvement :

$$\delta W_{\vec{F}} = \vec{F} \cdot \vec{v}\,\mathrm{d}t = 0 \tag{10}$$

Le travail étant nul à tout instant, le travail global est nul : **les forces normales au mouvement ne travaillent pas**.

1.3.2 Cas du poids.

Considérons un mobile de masse m, se déplaçant entre un point $\mathrm{M}_1\,(x_1, y_1, z_1)$ et un point $\mathrm{M}_2\,(x_2, y_2, z_2)$, selon une trajectoire quelconque. Durant tout le mouvement, il est soumis à son poids $m\vec{g}$.



Le travail élémentaire du poids lors d'un déplacement $\mathrm{d}\vec{\ell}$ est :

$$\delta W_{m\vec{g}} = m\vec{g}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = -mg\,\vec{u}_z\cdot(\mathrm{d}x\,\vec{u}_x + \mathrm{d}y\,\vec{u}_y + \mathrm{d}z\,\vec{u}_z) = -mg\,\mathrm{d}z \tag{11}$$

Le travail entre M_1 et M_2 s'obtient par intégration. Le seul paramètre dans (11) étant l'altitude, on intègre entre z_1 et z_2 :

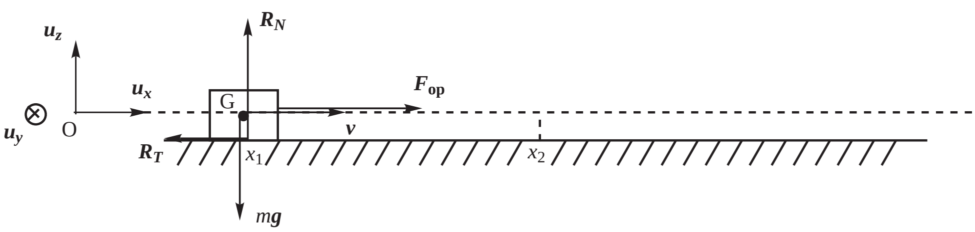
$$W_{m\vec{g}} = \int_{z_1}^{z_2} -mg\,\mathrm{d}z = -mg\,(z_2 - z_1) = mg\,(z_1 - z_2) \tag{12}$$

Cette expression a été obtenue sans qu'aucune hypothèse soit nécessaire sur la trajectoire réellement suivie par le mobile : **le travail du poids est indépendant du chemin suivi** ; c'est une **force conservative**. On peut retenir que, si l'axe vertical est orienté vers le haut, le travail du poids entre une altitude z_1 et une altitude z_2 est :

$$\boxed{W_{m\vec{g}} = mg\,(z_1 - z_2)} \quad \text{avec} \quad \vec{g} = -g\,\vec{u}_z \tag{13}$$

1.3.3 Cas des forces de frottement solide.

Considérons un mobile de masse m qui glisse sur un plan horizontal selon une trajectoire rectiligne repérée par le vecteur unitaire $\vec{u}_x$ sous l'action d'une force horizontale $\vec{F}_{\mathrm{op}}$ exercée par un opérateur. Le glissement se fait avec frottements, et on admet que la loi de Coulomb, reliant les composantes normale et tangentielle de la réaction du support, est vérifiée : $\|R_T\| = f\,\|R_N\|$.



Le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$m\,\vec{a} = m\,\vec{g} + \vec{R}_T + \vec{R}_N + \vec{F}_{\mathrm{op}} \tag{14}$$

Comme le solide est animé d'un mouvement rectiligne selon $\vec{u}_x$, on sait que $\vec{a}$ est selon $\vec{u}_x$. La réaction normale du support est selon $\vec{u}_z$, et la réaction tangentielle est opposée au mouvement. La projection de (14) selon $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_z$ donne donc :

$$ma = -R_T + F_{\text{op}} \tag{15}$$
$$0 = -mg + R_N \tag{16}$$

On déduit de (16) et de la loi de Coulomb :

$$R_N = mg \Rightarrow R_T = fmg \Rightarrow \vec{R}_T = -fmg\,\vec{u}_x \tag{17}$$

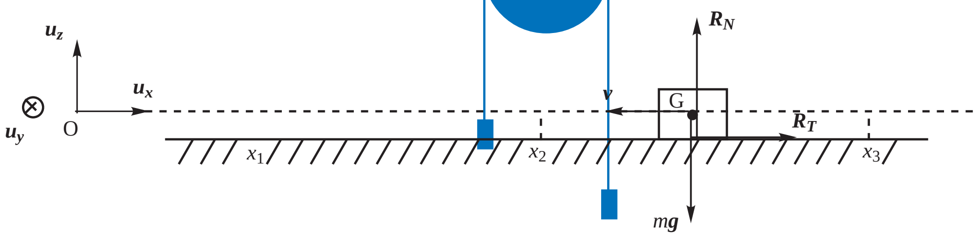
Calculons le travail de la force de frottement $\vec{R}_T$ si le mobile se déplace le long de l'axe $\vec{u}_x$ entre l'abscisse x_1 et l'abscisse $x_2 > x_1$. Le déplacement élémentaire n'a de composante que suivant $\vec{u}_x$ puisque le mouvement est dans cette direction. Le travail élémentaire de la force de frottement est alors :

$$\delta W_{\vec{R}_T} = -fmg\,\vec{u}_x \cdot \mathrm{d}x\,\vec{u}_x = -fmg\,\mathrm{d}x \tag{18}$$

Intégrons entre l'abscisse initiale et l'abscisse finale :

$$W_{\vec{R}_T} = \int_{x_1}^{x_2} -fmg\,\mathrm{d}x = -fmg\,(x_2 - x_1) \tag{19}$$

On peut noter que ce travail est négatif. Considérons maintenant le cas où le mobile va du point M_1 d'abscisse x_1 au point M_2 d'absisse x_2, mais en passant par un point M_3 d'abscisse $x_3 > x_2$. Le mobile se déplace donc suivant $\vec{u}_x$ de x_1 à x_3 et selon $-\vec{u}_x$ de x_3 à x_2.



Dans la première partie, le raisonnement est exactement le même que précédemment, donc :

$$W_{\vec{R}_T\,\mathrm{M}_1\to\mathrm{M}_3} = \int_{x_1}^{x_3} -fmg\,\mathrm{d}x = -fmg\,(x_3 - x_1) \tag{20}$$

Ce travail est négatif. Dans la deuxième partie du trajet, le sens du mouvement a changé, donc le sens de la force de frottement solide aussi. Elle vaut maintenant $\vec{R}_T = +fmg\,\vec{u}_x$. Le travail est alors :

$$W_{\vec{R}_T\,\mathrm{M}_3\to\mathrm{M}_2} = \int_{x_3}^{x_2} +fmg\,\mathrm{d}x = fmg\,(x_2 - x_3) = -fmg\,(x_3 - x_2) \tag{21}$$

Ce terme est encore négatif ; il ne va donc pas se retrancher au travail de la première partie, mais s'ajouter. Le travail total est la somme des travaux de chaque partie du trajet, soit :

$$W_{\vec{R}_T\,\mathrm{M}_1\to\mathrm{M}_3\to\mathrm{M}_2} = -fmg\,(2x_3 - x_1 - x_2) \tag{22}$$

On constate donc par le calcul que le travail de la force de frottement dépend du chemin suivi. Ce n'est pas une force conservative. C'est également le cas pour les forces de frottement fluide.

2 Théorème de l'énergie cinétique.

2.1 Énergie cinétique.

On considère un mobile de masse m constante et animé d'une vitesse $\vec{v}$ à l'instant t. Par définition, l'énergie cinétique à cette date est :

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}\,m\,\vec{v}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\,mv^2} \tag{23}$$

Cette grandeur dépend du référentiel d'étude, puisque $\vec{v}$ en dépend.

L'énergie cinétique peut s'écrire de façon équivalente à l'aide de la quantité de mouvement :

$$E_c = \frac{1}{2}\vec{p}\cdot\vec{v} = \frac{\vec{p}\cdot\vec{p}}{2m} = \frac{p^2}{2m} \tag{24}$$

2.2 Théorème de l'énergie cinétique.

Supposons que le mobile de masse m constante se déplace sur une trajectoire, le long de laquelle sa vitesse évolue. Considérons un intervalle de temps infinitésimal et évaluons la variation infinitésimale d'énergie cinétique, ce qui revient à calculer le taux d'accroissement de E_c en fonction du temps. La masse étant constante, il s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \frac{m}{2} \times \frac{\mathrm{d}(\vec{v}\cdot\vec{v})}{\mathrm{d}t} \tag{25}$$

Le produit scalaire se dérive comme un produit, soit :

$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \frac{m}{2}\left(\vec{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{v}\right) = m\vec{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{v}\cdot\left(m\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right) \tag{26}$$

On reconnait dans la parenthèse le terme $m\,\vec{a}$. D'après le principe fondamental de la dynamique, on a donc :

$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \vec{v}\cdot\sum\vec{F} \tag{27}$$

où $\sum\vec{F}$ est la somme des forces extérieures appliquées au mobile. Comme la vitesse est la même vis-à-vis de toutes les forces, on a :

$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \sum\left(\vec{v}\cdot\vec{F}\right) = \sum\mathcal{P}_{\vec{F}} \tag{28}$$

où $\mathcal{P}_{\vec{F}}$ est la puissance de la force $\vec{F}$ à la date t considérée. Cette relation constitue le **théorème de la puissance cinétique**. On en déduit que la variation d'énergie cinétique du système durant l'intervalle de temps infinitésimal dt est :

$$\mathrm{d}E_c = \sum\left(\vec{F}\cdot\vec{v}\right)\mathrm{d}t = \sum\left(\vec{F}\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}t\right) \Rightarrow \boxed{\mathrm{d}E_c = \sum\delta W_{\vec{F}}} \tag{29}$$

Ceci constitue la forme différentielle du théorème de l'énergie cinétique. Par intégration, la variation d'énergie cinétique ΔE_c entre la position initiale $\mathrm{M_i}$ et la position finale $\mathrm{M_f}$ est égale à la somme des travaux des forces appliquées entre ces deux états :

$$\boxed{\Delta E_c = E_{c\,\mathrm{f}} - E_{c\,\mathrm{i}} = \sum W_{\vec{F}\,\mathrm{M_i}\to\mathrm{M_f}}} \tag{30}$$

2.3 Travail moteur et travail résistant.

Considérons un mobile soumis à une unique force. Le théorème de l'énergie cinétique se réduit alors à :

$$\Delta E_c = W_{\vec{F}} \Rightarrow \frac{m}{2}(v_{\mathrm{f}}^2 - v_{\mathrm{i}}^2) = W_{\vec{F}} \tag{31}$$

On doit envisager trois cas.

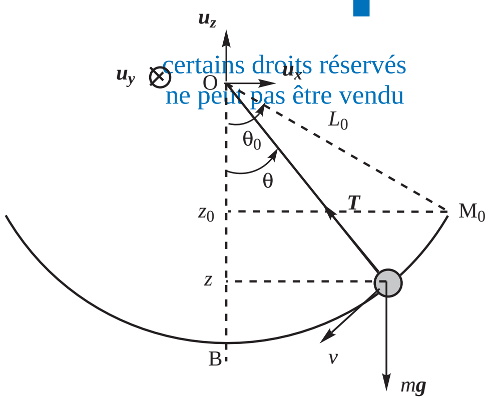
- Si $W_{\vec{F}} < 0$, l'énergie cinétique diminue au cours du mouvement, c'est-à-dire que la vitesse du mobile diminue, soit $v_{\mathrm{f}} < v_{\mathrm{i}}$. La force s'oppose au mouvement ; on dit qu'elle exerce un **travail résistant**.
- Inversement, si $W_{\vec{F}} > 0$, l'énergie cinétique augmente, soit $v_{\mathrm{f}} > v_{\mathrm{i}}$. La force favorise le mouvement ; son **travail** est **moteur**.
- Si $W_{\vec{F}} = 0$, la force ne travaille pas, et l'énergie cinétique du mobile n'est pas modifiée. La vitesse du mobile reste inchangée en norme. Elle peut en revanche être modifiée en direction.

Dans tout le cours, on n'envisage pas le cas où des forces intérieures au système s'exerceraient. Le système est supposé indéformable.

2.4 Exemple d'application.

Le théorème de l'énergie cinétique permet d'accéder à la vitesse sans avoir à passer par le principe fondamental de la dynamique, ce qui est généralement beaucoup plus rapide. Son inconvénient est qu'il ne donne accès qu'à la norme de la vitesse, et pas à sa direction. Cependant, si la trajectoire est imposée par des contraintes physiques (mobile sur un rail, masse oscillant au bout d'un fil, chute libre qu'on sait être verticale), la direction de la vitesse peut être facilement déduite. En d'autres termes, le théorème de l'énergie cinétique est intéressant lorsque le mouvement peut être décrit par un seul paramètre (altitude, distance à l'origine, angle, etc), c'est-à-dire pour les **problèmes à un seul paramètre**.

Prenons le cas d'une masse m à l'extrémité d'un fil inextensible de longueur L_0, et accroché à un point fixe O à son autre extrémité (c'est un pendule). On écarte le fil de la verticale d'un angle θ_0 et on lache la masse sans vitesse initiale. On cherche la vitesse de la masse lorsque le fil repasse par la position verticale.



Il est clair que le mouvement a lieu uniquement dans le plan vertical contenant le fil à l'instant initial. En effet, les deux seules forces sont le poids (selon la verticale) et la tension du fil (selon le fil) ; l'opérateur ne donnant pas de vitesse initiale, le mouvement ne peut avoir lieu que dans le plan imposé par les deux forces. En outre, la masse reste à distance constante de O, c'est-à-dire que le mouvement est circulaire. Le seul paramètre qui varie est donc l'angle θ ; c'est un problème à un seul paramètre.

La vitesse initiale étant nulle, la variation de l'énergie cinétique entre l'instant initial, où la masse est en M_0 défini par l'angle θ_0, et un instant t où la masse est en M défini par l'angle θ, est :

$$\Delta E_{c\,\mathrm{M}_0 \rightarrow \mathrm{M}} = E_{c\,(\mathrm{M})} - E_{c\,(\mathrm{M}_0)} = \frac{1}{2}mv^2 - 0 \tag{32}$$

Par ailleurs, les deux seules forces appliquées sont le poids $m\vec{g}$ et la tension du fil $\vec{T}$. Celle-ci étant portée par le fil est dans la direction du rayon de la trajectoire, donc orthogonale à la vitesse en tout point ; la tension du fil ne travaille pas. Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit alors :

$$\Delta E_{c\,\mathrm{M_0}\to\mathrm{M}} = W_{m\vec{g}\,\mathrm{M_0}\to\mathrm{M}} + W_{\vec{T}} = W_{m\vec{g}\,\mathrm{M_0}\to\mathrm{M}} \tag{33}$$

L'axe vertical étant orienté vers le haut, le travail du poids est directement donné par (13) :

$$W_{m\vec{g}\,\mathrm{M_0}\to\mathrm{M}} = mg\left(z_{\mathrm{M_0}} - z_{\mathrm{M}}\right) \tag{34}$$

Il reste à exprimer les altitudes en fonction des données du problème. Le point O étant l'origine, elles sont négatives, et :

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg\left(-L\,\cos\theta_0 - (-L\,\cos\theta)\right) \Rightarrow v^2 = 2gL\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right) \tag{35}$$

La vitesse au point B, qui correspond à $\theta = 0$ est donc :

$$v_{\mathrm{B}} = \sqrt{2gL\left(1 - \cos\theta_0\right)} \tag{36}$$

La trajectoire étant imposée, la direction de la vitesse est connue. En B, elle est horizontale et selon $-\vec{u}_x$. La vitesse en B est donc :

$$\vec{v}_{\mathrm{B}} = -\sqrt{2gL\left(1 - \cos\theta_0\right)}\ \vec{u}_x \tag{37}$$

3 Énergie potentielle.

3.1 Définition de l'énergie potentielle.

Les forces dites « de champ », dont l'intensité ne dépend pas de la vitesse du système, mais seulement de sa position, sont des forces conservatives ; leur travail ne dépend pas du chemin suivi. C'est le cas du poids, dont l'intensité dépend uniquement de la localisation du système à proximité de la Terre (le vecteur $\vec{g}$ ayant un module variable du pôle à l'équateur). On va voir que, pour ces forces, il est commode d'introduire une nouvelle grandeur, l'énergie potentielle.

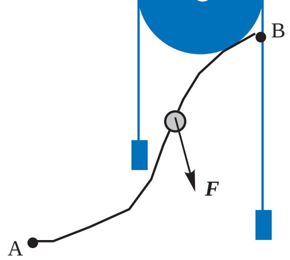
Repartons du cas du poids. Pour une masse m se déplaçant d'un point A d'altitude z_{A} à un point B d'altitude z_{B}, le travail du poids s'écrit :

$$W_{m\vec{g}\,\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = mg\,(z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{B}}) = -mgz_{\mathrm{B}} - (-mgz_{\mathrm{A}}) \tag{38}$$

Comme le travail ne dépend que des états extrêmes, il est logique de pouvoir l'exprimer sous la forme d'une différence entre un terme dépendant de l'état final et un terme dépendant de l'état initial. Ce terme est par convention l'opposé de l'**énergie potentielle** du système soumis au poids. Ceci se généralise à toute **force conservative** $\vec{F}$, dont le travail entre un point A et un point B peut s'écrire sous la forme :

$$\boxed{W_{\vec{F}\,\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = -(E_{p\mathrm{B}} - E_{p\mathrm{A}}) = -\Delta E_{p\,\mathrm{A}\to\mathrm{B}}} \tag{39}$$

L'**énergie potentielle** E_p ne dépend que de la position du système. La convention de signe choisie a une raison qui apparaitra par la suite.



Lors d'un déplacement élémentaire $\mathrm{d}\vec{\ell}$, sur lequel le travail de la force conservative $\vec{F}$ est $\delta W_{\vec{F}}$, la variation infinitésimale de l'énergie potentielle du système est :

$$\boxed{\mathrm{d}E_p = -\delta W_{\vec{F}}} \tag{40}$$

En explicitant le travail élémentaire, cette formule peut encore s'écrire :

$$\mathrm{d}E_p = -\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} \tag{41}$$

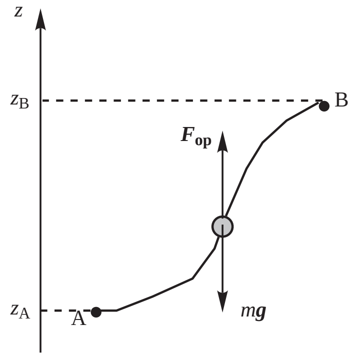
c'est-à-dire que la force $\vec{F}$ s'interprète comme le taux de variation de l'énergie potentielle E_p en fonction du déplacement. On dit qu'une force conservative *dérive* d'une énergie potentielle.

Si un système est soumis à N forces conservatives, le travail total étant la somme des travaux de chacune des forces, l'énergie potentielle totale du système est la somme des énergies potentielles relatives à chacune des forces :

$$E_p = \sum_{j=1}^{N} E_{p\,j} \tag{42}$$

3.2 Interprétation physique.

Considérons un objet ponctuel de masse m qu'on veut déplacer d'un point A d'altitude z_{A} à un point B d'altitude z_{B} de façon infiniment lente.



Si l'opération se fait de façon infiniment lente, la vitesse du mobile est quasiment nulle à chaque instant, c'est-à-dire que l'objet est quasiment à l'équilibre. Dans ce cas, la somme des forces appliquées à l'objet est quasiment nulle à chaque instant. En appelant $\vec{F}_{\text{op}}$ la force exercée par l'opérateur pour déplacer la masse m, on a donc :

$$\vec{F}_{\text{op}} + m\vec{g} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_{\text{op}} = -m\vec{g} \tag{43}$$

Le travail exercé par l'opérateur entre le point A et le point B est :

$$W_{\text{op}} = \int_{\text{A}}^{\text{B}} \vec{F}_{\text{op}} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \int_{\text{A}}^{\text{B}} -m\vec{g} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = -W_{m\vec{g}\,\text{A}\to\text{B}} \tag{44}$$

Comme le poids dérive d'une énergie potentielle, on a finalement :

$$W_{\text{op}} = -(-\Delta E_p) = \Delta E_p \tag{45}$$

La variation d'énergie potentielle du système s'interprète donc comme le travail que doit fournir un opérateur pour amener le système, soumis à la force conservative considérée (ici le poids), de son état initial à son état final, de façon infiniment lente. Le travail fourni par l'opérateur est une énergie qui est transférée au système. Le système emmagasine alors l'énergie fournie par l'opérateur. Cette énergie est évidemment algébrique ; si elle est négative, c'est que le système restitue en réalité de l'énergie à l'opérateur.

3.3 Exemples importants.

Il est commode d'établir l'expression de l'énergie potentielle associée aux forces conservatives les plus usuelles : poids, force de gravitation, force de rappel d'un ressort.

3.3.1 Énergie potentielle de pesanteur.

On a vu que le travail du poids entre un point A d'altitude z_{A} et un point B d'altitude z_{B}, l'axe vertical étant orienté vers le haut, est de la forme :

$$W_{m\vec{g}\,\text{A}\to\text{B}} = -mg\,z_{\text{B}} - (-mg\,z_{\text{A}}) = -(E_{p\,\text{B}} - E_{p\,\text{A}}) \tag{46}$$

Par identification, on en déduit que l'**énergie potentielle de pesanteur** (c'est-à-dire associée au poids), varie avec l'altitude z selon la loi :

$$\boxed{E_{p\,(z)} = mgz + \text{cte}} \quad \text{avec} \quad \vec{g} = -g\,\vec{u}_z \tag{47}$$

La présence de la constante est imposée par le fait que l'énergie potentielle n'apparait que dans une différence entre deux termes dans la formule (46). Le choix de la constante est arbitraire ; on peut librement en choisir la valeur. Il est fréquent de poser l'énergie potentielle nulle à l'altitude $z = 0$, ce qui implique alors que la constante soit nulle, et que l'énergie potentielle soit de la forme :

$$E_p = mgz \tag{48}$$

Ce choix n'est nullement une obligation. On peut aussi poser l'énergie potentielle de pesanteur à l'altitude initiale du mobile, ou à l'altitude correspondant à sa position d'équilibre, ou au sol (qui ne correspond pas nécessairement à l'altitude 0), ou toute autre condition. On s'arrange usuellement pour poser la constante de sorte à simplifier les expressions.

On peut retrouver l'expression (47) par une autre démonstration. On sait que sur un déplacement infinitésimal, le travail du poids s'écrit :

$$\delta W_{m\vec{g}} = m\,\vec{g}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = -mg\,\vec{u}_z\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = -mg\,\mathrm{d}z \tag{49}$$

Or le poids dérive d'une énergie potentielle, donc :

$$\delta W_{m\vec{g}} = -\mathrm{d}E_p \Rightarrow \mathrm{d}E_p = mg\,\mathrm{d}z \Rightarrow E_p = mgz + \mathrm{cte} \tag{50}$$

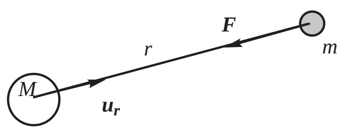
La force électrique $\vec{F} = q\,\vec{E}$ est mathématiquement analogue au poids $\vec{F} = m\vec{g}$. On peut donc définir une énergie potentielle associée à la force subie par une particule chargé dans un champ électrique : $E_p = qV + \mathrm{cte}$, où V est le potentiel électrique. On a alors une équivalence mathématique entre les couples de grandeurs : $m \leftrightarrow q$, $\vec{g} \leftrightarrow \vec{E}$, $gz \leftrightarrow V$.

3.3.2 Énergie potentielle gravitationnelle.

On considère un système constitué d'un objet ponctuel de masse m, qui subit une force gravitationnelle de la part d'un autre objet ponctuel de masse M. Cette force a pour expression :

$$\vec{F} = -\frac{\mathcal{G}mM}{r^2}\,\vec{u}_r \tag{51}$$

où r est la distance séparant les deux masses, et $\vec{u}_r$ un vecteur unitaire dirigé de la masse attractrice M vers le système de masse m. C'est le cas typique d'une planète de masse m subissant une force attractive de la part de son étoile, ou d'un satellite (naturel ou artificiel) de masse m en orbite autour de sa planète.



La force gravitationnelle ne dépend pas de la vitesse du système, mais uniquement de sa position r par rapport à la masse attractrice ; c'est une force conservative, qui dérive donc d'une énergie potentielle. Le travail élémentaire de la force gravitationnelle est alors égal à la variation infinitésimale d'une énergie potentielle :

$$\mathrm{d}E_p = -\delta W_{\vec{F}} \tag{52}$$

Considérons un déplacement $\mathrm{d}\vec{\ell}$ de la masse m. Dans le cas d'un astre en orbite autour d'un autre astre, la force dépend de la distance entre les deux astres ; il est donc judicieux de raisonner en coordonnées sphériques ou cylindriques. Comme en outre le mouvement est quasiment plan, on peut raisonner en coordonnées polaire. Le travail élémentaire est de la forme :

$$\delta W_{\vec{F}} = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = -\frac{\mathcal{G}mM}{r^2}\,\vec{u}_r\cdot(\mathrm{d}r\,\vec{u}_r + r\mathrm{d}\theta\,\vec{u}_\theta + \mathrm{d}z\,\vec{u}_z) = -\frac{\mathcal{G}mM}{r^2}\,\mathrm{d}r \tag{53}$$

On pourrait aussi raisonner en coordonnées sphériques, ce qui conduirait au même résultat, car le déplacement élémentaire est de la forme $\mathrm{d}r\,\vec{u}_r + A\,\vec{u}_\theta + B\,\vec{u}_\varphi$, dont seul le terme en $\mathrm{d}r$ est conservé lors du calcul du produit scalaire, puisque la force $\vec{F}$ est selon $\vec{u}_r$.

On en déduit la variation élémentaire d'énergie potentielle lors du déplacement $\mathrm{d}\vec{\ell}$:

$$\mathrm{d}E_p = -\delta W_{\vec{F}} = \mathcal{G}mM\,\frac{\mathrm{d}r}{r^2} \tag{54}$$

Par intégration, l'**énergie potentielle gravitationnelle** dépend uniquement de la distance entre les masses en interaction, selon la formule :

$$\boxed{E_{p\,(r)} = -\frac{\mathcal{G}mM}{r} + \mathrm{cte}} \tag{55}$$

Le choix de la constante est libre. Il est fréquent de poser la constante égale à 0, de sorte que l'énergie potentielle soit nulle lorsque les masses sont infiniment éloignées l'une de l'autre, c'est-à-dire lorsque la force gravitationnelle est devenue infiniment faible (masses sans interaction l'une avec l'autre). On a alors :

$$E_{p\,(r)} = -\frac{\mathcal{G}mM}{r} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0 \tag{56}$$

Dans cette convention, on constate que $E_p < 0$ pour toute valeur de r. La force attractive entre les masses est associée à une valeur négative de l'énergie potentielle. On peut noter que les forces de Van der Waals existant entre molécules sont également des forces attractives conservatives ; elles dependent de la distance selon une loi en $-1/r^7$, avec une convention identique pour l'orientation du vecteur $\vec{u}_r$. En posant nulle l'énergie potentielle lorsque les molécules sont infiniment éloignées, on a : $E_p = -A/r^6$, avec A une constante positive. Cette énergie potentielle, associée à une force attractive, est négative.

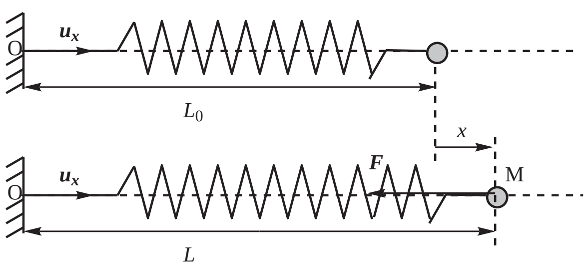
La force de Coulomb entre deux charges électriques q et Q est mathématiquement analogue à la force gravitationnelle. Les charges de même signe se repoussant, avec la même convention d'orientation du vecteur $\vec{u}_r$, la force est de la forme $\vec{F} = qQ/4\pi\epsilon_0 r^2\,\vec{u}_r$. L'énergie potentielle associée à la force électrique exercée par la charge Q sur la charge q est de la forme : $E_{p\,(r)} = qQ/4\pi\epsilon_0 r + \mathrm{cte}$. Il est usuel de poser la constante égale à 0, de sorte que l'énergie potentielle soit nulle lorsque les charges sont infiniment éloignées et sans interaction. Contrairement au cas de la force gravitationnelle, la force de Coulomb peut être attractive ou répulsive, en fonction du signe de qQ. Si $qQ > 0$, la force est répulsive et l'énergie potentielle est positive ; si $qQ < 0$, la force est attractive et l'énergie potentielle est négative. Il y a une équivalence mathématique entre les couples de grandeurs : $m \leftrightarrow q$, $M \leftrightarrow Q$, $\mathcal{G} \leftrightarrow -1/4\pi\epsilon_0$, $r \leftrightarrow r$.

3.3.3 Énergie potentielle élastique.

Considérons un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide L_0. La longueur du ressort étant portée à une valeur L, il exerce une force de rappel égale à :

$$\vec{F} = -k\,(L - L_0)\,\vec{u}_x = -k\,x\,\vec{u}_x \tag{57}$$

où $\vec{u}_x$ est dirigé dans le sens de l'allongement, et où x est l'allongement algébrique.



Considérons un système accroché à l'extrémité du ressort effectuant un déplacement élémentaire le long de l'axe $\vec{u}_x$. Ce déplacement est :

$$\mathrm{d}\vec{\ell} = \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \mathrm{d}(L\,\vec{u}_x) = \mathrm{d}L\,\vec{u}_x = \mathrm{d}(L_0 + x)\,\vec{u}_x = \mathrm{d}x\,\vec{u}_x \tag{58}$$

Le système subit la force de rappel du ressort. Son travail élémentaire associé est :

$$\delta W_{\vec{F}} = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = -k\,x\,\vec{u}_x \cdot \mathrm{d}x\,\vec{u}_x - k\,x\,\mathrm{d}x \tag{59}$$

La force ne dépendant que de l'allongement, elle ne dépend que de la position du système. C'est une force conservative, qui dérive donc d'une énergie potentielle :

$$\mathrm{d}E_p = -\delta W_{\vec{F}} = k\,x\,\mathrm{d}x \tag{60}$$

Par intégration, on en déduit que l'**énergie potentielle élastique** ne dépend que de l'allongement algébrique du ressort :

$$\boxed{E_{p\,(x)} = \frac{k\,x^2}{2} + \mathrm{cte}} \tag{61}$$

On pose usuellement la constante nulle, ce qui correspond à une énergie potentielle nulle lorsque le ressort n'est pas déformé. L'énergie potentielle élastique est alors :

$$E_{p\,(x)} = \frac{k\,x^2}{2} \tag{62}$$

On peut noter que l'énergie potentielle est toujours positive, quel que soit le signe de l'allongement, c'est-à-dire que le ressort soit en extension ou en compression. Le ressort emmagasine la même énergie si on lui impose une compression de $|x|$ ou une extension de $|x|$.

Les fils de torsion sont les équivalents des ressorts pour les mouvements de rotation. Si on leur applique une torsion d'un angle algébrique θ, ils induisent un moment de force de la forme $-C\theta$, avec C la constante de rappel. L'énergie potentielle de torsion est alors en $C\theta^2/2$. On a une équivalence mathématique entre les couples de grandeurs : $x \leftrightarrow \theta$, $k \leftrightarrow C$.

4 Énergie mécanique.

4.1 Conservation de l'énergie mécanique.

Considérons un système soumis à une force conservative. Lors d'un déplacement infinitésimal $\mathrm{d}\vec{\ell}$, la variation d'énergie potentielle est :

$$\mathrm{d}E_p = -\delta W \tag{63}$$

Or, le théorème de l'énergie cinétique, valable quelle que soit la nature de la force extérieure, relie le travail à la variation d'énergie cinétique :

$$\delta W = \mathrm{d}E_c \Rightarrow \mathrm{d}E_p = -\mathrm{d}E_c \Rightarrow \mathrm{d}(E_c + E_p) = 0 \tag{64}$$

On appelle **énergie mécanique** du système la grandeur :

$$\boxed{E_m = E_c + E_p} \tag{65}$$

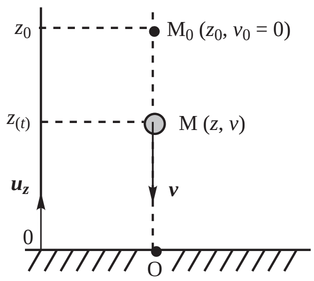
La relation (64) se généralise au cas où plusieurs forces conservatives s'appliquent. On en déduit que

pour un système soumis uniquement à des forces conservatives, l'énergie mécanique est une constante du mouvement, soit :

$$\Delta E_m = 0 \tag{66}$$

La conservation de l'énergie mécanique est une variante du théorème de l'énergie cinétique. Elle permet de remplacer efficacement le principe fondamental de la dynamique pour les problèmes à une dimension. L'avantage de la conservation de l'énergie mécanique par rapport au théorème de l'énergie cinétique est de n'avoir pas à faire le calcul du travail si on connait la forme de l'énergie potentielle associée à la ou les force(s) en présence.

Prenons l'exemple d'une masse m lachée sans vitesse initiale d'une altitude z_0 et soumise uniquement à son poids. En l'absence de vitesse initiale, et sachant que la seule force est selon la verticale, le mouvement se fait selon cette direction. L'altitude est donc l'unique paramètre du problème. On définit une base $(\mathrm{O}, \vec{u}_z)$, avec O au niveau du sol et $\vec{u}_z$ orienté vers le haut.



Le système étant uniquement soumis à son poids, qui est une force conservative, il y a conservation de l'énergie mécanique au cours de la chute libre. L'énergie mécanique à un instant t pour lequel l'altitude est z et la vitesse est v, est égale à l'énergie mécanique à l'instant $t = 0$ pour lequel l'altitude est z_0 et la vitesse est nulle :

$$E_{m\,(t)} = E_{m\,0} \Rightarrow E_{c\,(t)} + E_{p\,(t)} = E_{c\,0} + E_{p\,0} \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 + (mgz + \mathrm{cte}) = 0 + (mgz_0 + \mathrm{cte}) \tag{67}$$

Il en découle une relation entre la vitesse du mobile et l'altitude atteinte, puis le vecteur vitesse, puisque la direction du mouvement est connue :

$$v = \sqrt{2g\,(z_0 - z)} \Rightarrow \vec{v} = -\sqrt{2g\,(z_0 - z)}\;\vec{u}_z \tag{68}$$

Avec le principe fondamental de la dynamique, cette relation ne peut être obtenue qu'en intégrant deux fois pour obtenir le vecteur vitesse et le vecteur position en fonction du temps, puis en remplaçant le temps en fonction de la position dans l'expression de la vitesse.

La conservation de l'énergie mécanique ou le théorème de l'énergie cinétique permettent donc une résolution très rapide des problèmes à un paramètre. Dans le cas d'un problème à plus d'un paramètre, par exemple le tir d'un projectile selon un angle quelconque par rapport à l'horizontale, le théorème de l'énergie cinétique ou la conservation de l'énergie mécanique ne fournissent que le *module* de la vitesse, et non sa direction.

4.2 Cas des forces non conservatives.

On s'intéresse maintenant à un système soumis à un ensemble de forces, dont certaines sont conservatives, et d'autres non. Pour un déplacement élémentaire, la variation d'énergie cinétique est donnée par le théorème de l'énergie cinétique :

$$\mathrm{d}E_c = \delta W_{\mathrm{C}} + \delta W_{\mathrm{NC}} \tag{69}$$

où δW_{C} est le travail élémentaire des forces conservatives, et δW_{NC} celui des forces non conservatives. Les forces conservatives dérivent globalement d'une énergie potentielle (somme des énergies potentielles associées à chacune d'entre elles), donc :

$$\mathrm{d}E_c = -\mathrm{d}E_p + \delta W_{\mathrm{NC}} \Rightarrow \mathrm{d}(E_c + E_p) = \delta W_{\mathrm{NC}} \Rightarrow \mathrm{d}E_m = \delta W_{\mathrm{NC}} \tag{70}$$

Par intégration on en déduit que la variation de l'énergie mécanique du système au cours d'un mouvement macroscopique, est égale au travail des forces non conservatives :

$$\boxed{\Delta E_m = W_{\mathrm{NC}}} \tag{71}$$

Plusieurs cas particuliers sont à considérer. D'une part, s'il n'y a pas de forces conservatives, $W_{\mathrm{NC}} = 0$ et on retrouve la conservation de l'énergie mécanique. D'autre part, si les forces non conservatives ne travaillent pas, ce qui est le cas lorsqu'elles sont à tout instant orthogonales au mouvement (réaction normale d'un support, tension du fil d'un pendule, etc), alors leur travail est nul.

Il y a conservation de l'énergie mécanique si toutes les forces non conservatives appliquées au système ne travaillent pas.

Le cas des forces de frottement (solide ou fluide) est fondamental. Par définition, elles sont non conservatives et leur travail est résistant car elles s'opposent au mouvement, soit :

$$\vec{F} \cdot \vec{v} < 0 \Rightarrow W_{\vec{F}} < 0 \tag{72}$$

En conséquence, si les forces non conservatives sont des forces de frottement, on a :

$$W_{\mathrm{NC}} < 0 \Rightarrow \Delta E_m < 0 \tag{73}$$

La présence de **forces de frottement** tend à faire diminuer l'énergie mécanique du système. Il y a **dissipation d'énergie**, cette dissipation se faisant sous une forme dégradée, c'est-à-dire **sous forme de chaleur**.

Enfin, l'énergie mécanique d'un système peut augmenter sous l'action de forces non conservatives. Ainsi un opérateur qui agit de sorte à augmenter la vitesse d'un système lui fournit un travail, ce qui a pour effet d'augmenter son énergie mécanique. On remarquera cependant qu'un tel processus n'est pas spontané, contrairement aux forces de frottement. L'évolution spontanée d'un système est donc associée à une diminution de son énergie mécanique, la conservation étant un cas exceptionnel (aucun frottement).

4.3 État de diffusion et état lié.

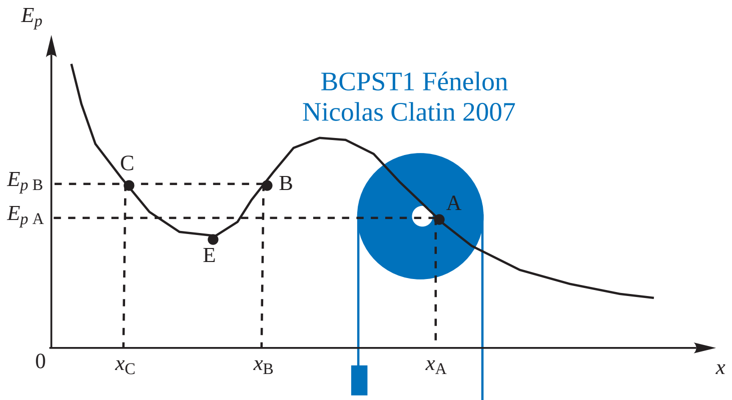
Le concept d'énergie mécanique et d'énergie potentielle permet, dans certains cas, de prévoir les évolutions possibles d'un système. Pour un système dont le mouvement dépend d'un unique paramètre x (altitude, distance à un point, angle, etc), l'énergie potentielle, l'énergie cinétique et l'énergie mécanique sont des fonctions de ce paramètre. L'énergie cinétique étant toujours positive, on a :

$$E_{m\,(x)} = E_{p\,(x)} + E_c > E_{p\,(x)} \tag{74}$$

Dans le cas où le système est soumis uniquement à des forces conservatives et à des forces non conservatives qui ne travaillent pas, l'énergie mécanique se conserve. Elle est donc égale à sa valeur à l'instant initial. Alors, pour toute valeur du paramètre x, on a :

$$E_{p\,(x)} < E_{m\,0} \tag{75}$$

Supposons que l'énergie potentielle ait une allure connue en fonction du paramètre x, par exemple de la forme suivante.



Considérons le cas où le système est initialement au point A, c'est-à-dire que $x_{(t=0)} = x_\mathrm{A}$, et laché sans vitesse initiale, soit $E_{c\,(t=0)} = 0$. L'énergie mécanique initiale est :

$$E_{m\,0} = E_{c\,(t=0)} + E_{p\,(t=0)} = 0 + E_{p\,\mathrm{A}} \tag{76}$$

D'après (75), l'énergie potentielle du système à tout instant ne peut être qu'inférieure à cette valeur, soit :

$$\forall t > 0, \quad E_p < E_{p\,\mathrm{A}} \tag{77}$$

D'après le profil d'énergie potentielle, la seule possibilité est que $x > x_\mathrm{A}$: le paramètre du problème (altitude, distance à un point, angle), s'éloigne de sa valeur initiale. Le système ne peut évoluer qu'en s'éloignant de sa position initiale, et cet éloignement peut devenir infini. On dit que le système est dans un **état de diffusion**. C'est le cas d'une masse qu'on lache du flanc d'une montagne et dont l'énergie potentielle ne peut que diminuer au fur et à mesure que l'altitude diminue.

Inversement, si le système est laché sans vitesse initiale du point B, soit $x_{(t=0)} = x_\mathrm{B}$ et $E_{c\,(t=0)} = 0$. Alors :

$$E_{m\,0} = E_{c\,(t=0)} + E_{p\,(t=0)} = 0 + E_{p\,\mathrm{B}} \Rightarrow \forall t > 0, \quad E_p < E_{p\,\mathrm{B}} \tag{78}$$

D'après le profil d'énergie potentielle, on constate maintenant que le paramètre x reste nécessairement confiné entre deux valeurs extrêmes : $x_\mathrm{C} < x < x_\mathrm{B}$. Le système ne peut donc pas s'éloigner à l'infini de sa position initiale ; il est dans un **état lié**, ou dans un **puits de potentiel**. C'est le cas de la Lune, qui est prisonnière de l'attraction de la Terre.