MÉCANIQUE

chapitre 8

Équilibre. Oscillateur harmonique.

Dans ce chapitre, on montrera comment on peut déterminer les positions d'équilibre d'un système à partir de son énergie potentielle. Selon l'allure de celle-ci, l'équilibre peut être stable (une bille immobile au fond d'un trou), ou instable (la même bille immobile au sommet d'un monticule). Dans le cas des équilibres instables, la moindre perturbation entraine la rupture de l'équilibre (le système s'en éloigne), alors qu'écarté d'une position d'équilibre stable, un système y revient.

Dans ce dernier cas, il est fréquent que le retour à la position d'équiilbre se fasse selon un mouvement oscillant, souvent de type harmonique. L'oscillateur harmonique est une modélisation très fructueuse pour de très nombreux phénomènes physiques ou chimiques (liaisons covalentes par exemple).

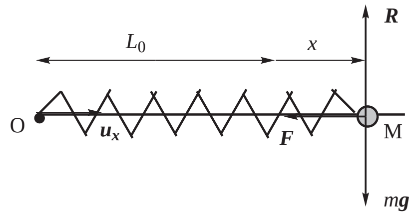
Plan du chapitre.

1. Équilibre d'un système
   - 1.1 Système à un paramètre ; exemples
   - 1.2 Condition d'équilibre
   - 1.3 Stabilité de l'équilibre
2. Le modèle de l'oscillateur harmonique à une dimension
   - 2.1 Exemples ; équation différentielle
   - 2.2 Résolution de l'équation différentielle
   - 2.3 Aspect énergétique

1 Équilibre d'un système.

1.1 Système à un paramètre ; exemples.

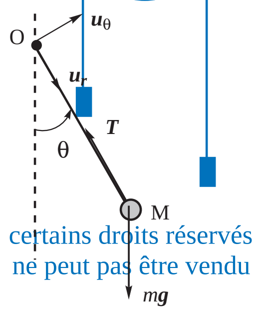
Dans tout ce chapitre, on s'intéresse exclusivement aux systèmes mécaniques **à un paramètre**, c'est-à-dire dont le comportement dépend d'**une seule variable** (distance, angle). Le premier exemple classique est celui d'un point matériel M accroché à l'extrémité d'un ressort enfilé sur une tige horizontale. Choisissons une base telle que l'origine O soit à l'extrémité fixe du ressort, et telle qu'un des vecteurs de base soit suivant la tige.



Il est évident que la position de M dépend exclusivement de la longueur totale du ressort, donc de son allongement. En appelant L_0 la longueur à vide du ressort et x son allongement, on peut exprimer la position du point M et le déplacement élémentaire en fonction du seul paramètre x :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = (L_0 + x)\,\vec{u}_x \Rightarrow \mathrm{d}\vec{\ell} = \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \mathrm{d}x\,\vec{u}_x \qquad (1)$$

Un autre exemple est celui d'un pendule constitué d'un fil de longueur L constante, attaché à un point fixe O, et à l'extrémité duquel est lié un point matériel M de masse m. On choisit alors de travailler dans la base locale $\mathrm{O}, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$.



Il est clair que la position de M est totalement déterminée à l'aide de l'angle θ. À partir du vecteur position du point M, on montrer aisément que le vecteur déplacement ne dépend que du paramètre θ :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = L\,\vec{u}_r \Rightarrow \mathrm{d}\vec{\ell} = \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = L\mathrm{d}\theta\,\vec{u}_\theta \qquad (2)$$

De ces deux exemples, on peut conclure que, dans un système à un paramètre, et à condition de choisir une base adaptée au problème, le vecteur déplacement élémentaire $\mathrm{d}\vec{\ell}$ s'écrit en fonction d'un unique paramètre s, sous la forme :

$$\mathrm{d}\vec{\ell} = K\,\mathrm{d}s\,\vec{u}_s \qquad \text{avec} \qquad K > 0 \qquad (3)$$

1.2 Condition d'équilibre.

Considérons un système mécanique à un paramètre, soumis à un ensemble de forces, dont certaines sont conservatives, et les autres ne travaillent pas. On exclut donc le cas où des forces non conservatives travaillent (forces de frottement). Le travail total reçu par le système est donc uniquement celui des forces conservatives. Exprimons ce travail dans les deux cas particuliers étudiés ci-dessus.

Dans le cas du ressort avec un coulissement sans frottement du point M sur la tige, le poids et la réaction de la tige sont normales au mouvement, et ne travaillent donc pas. La seule force qui travaille est la force de rappel du ressort ; si k est la constante de raideur, elle s'exprime sous la forme :

$$\vec{F} = -kx\,\vec{u}_x \tag{4}$$

Le travail correspondant est donc :

$$\delta W_{\vec{F}} = -kx\,\vec{u}_x \cdot \mathrm{d}x\,\vec{u}_x = -kx\mathrm{d}x \tag{5}$$

Dans le cas du pendule, la seule force qui travaille est le poids, l'autre étant la tension du fil qui est normale au mouvement. La force qui travaille s'exprime sous la forme :

$$\vec{F} = m\vec{g} = mg\cos\theta\,\vec{u}_r - mg\sin\theta\,\vec{u}_\theta \tag{6}$$

Le travail du poids est alors :

$$\delta W_{m\vec{g}} = (mg\cos\theta\,\vec{u}_r - mg\sin\theta\,\vec{u}_\theta)\cdot L\mathrm{d}\theta\,\vec{u}_\theta = -mgL\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \tag{7}$$

On constate dans les deux cas que le travail total s'exprime en fonction du paramètre s du problème, c'est-à-dire qu'on peut l'exprimer sous la forme :

$$\delta W_{\vec{F}} = F_{(s)}\mathrm{d}s \tag{8}$$

où $F_{(s)}$ est une fonction de s. Ceci est tout à fait général ; si s est le paramètre du problème, le travail élémentaire de la force totale $\vec{F}$ appliquée est de la forme :

$$\delta W_{\vec{F}} = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = \vec{F}\cdot K\mathrm{d}s\,\vec{u}_s \tag{9}$$

Le produit scalaire $\vec{F}\cdot\vec{u}_s$ donne la composante selon $\vec{u}_s$ de la force $\vec{F}$; on a donc :

$$\delta W_{\vec{F}} = F_s K\,\mathrm{d}s \tag{10}$$

Comme le système est à un paramètre, le terme F_s ne peut dépendre que du paramètre s. En effet, si les forces qui travaillent dépendaient de deux paramètres, l'état du système ne pourraient pas dépendre d'un seul paramètre. Le terme KF_s est donc une certaine fonction de s, qu'on peut noter $F_{(s)}$ et qui inclut la composante de la force $\vec{F}$ selon $\vec{u}_s$. Le travail élémentaire des forces qui s'appliquent est finalement de la forme :

$$\delta W_{\vec{F}} = F_s K\,\mathrm{d}s = F_{(s)}\,\mathrm{d}s \tag{11}$$

Dans le cas où les seules forces qui travaillent sont conservatives, on en déduit que l'énergie potentielle du système est de la forme :

$$\mathrm{d}E_p = -\delta W_{\vec{F}} = -F_{(s)}\,\mathrm{d}s \Rightarrow \frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}s} = -F_{(s)} \tag{12}$$

L'énergie potentielle du système dépend évidemment exclusivement du paramètre s, et l'équation précédente en donne la variation en fonction de s. Si le système est à l'équilibre, la somme des forces qui s'appliquent est nulle ; par voie de conséquence, la composante de la force totale suivant $\vec{u}_s$ est nulle. Or, seules les forces qui travaillent ont une composante suivant $\vec{u}_s$ qui est la direction du vecteur déplacement ; on en déduit qu'à l'équilibre :

$$F_{(s_{\mathrm{eq}})} = 0 \tag{13}$$

En d'autres termes, une **position d'équilibre** correspond à un ***extremum* de l'énergie potentielle** (ou à un point d'inflexion avec tangente horizontale), en tant que fonction du paramètre s :

$$\boxed{\left(\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}s}\right)_{s=s_{\mathrm{eq}}} = 0} \tag{14}$$

Ceci est généralisable à des systèmes à plus d'un paramètre. Les positions d'équilibre correspondent à des *extrema* de l'énergie potentielle, mais celle-ci est une fonction de plusieurs variables. Cela revient à dire qu'on est à la stabilité s'il y a stabilité par rapport à toutes les variables simultanément.

1.3 Stabilité de l'équilibre.

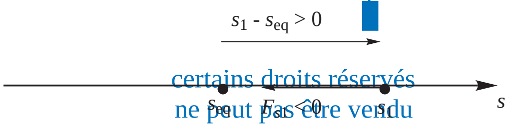
1.3.1 Équilibre stable et instable.

Une bille posée au fond d'un bol est dans une position d'équilibre qu'il est intuitif de qualifier de stable. À l'inverse, un objet posé en équilibre sur le nez d'un jongleur est dans une position d'équilibre dont il est aisé de constater qu'elle est instable. D'une façon générale, on peut dire que :

une position d'équilibre est **stable** si, écarté légèrement de cette position d'équilibre, le système tend à y revenir spontanément ; inversement, la position d'équilibre est **instable** si, écarté de cette position, le système s'en éloigne de plus en plus.

1.3.2 Condition pour avoir un équilibre stable.

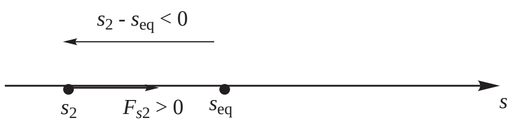
Reprenons le système à un paramètre s. Supposons que le système soit dans sa position d'équilibre $s_{(\mathrm{eq})}$; on l'écarte légèrement jusqu'à ce qu'il se retrouve dans la position s_1 telle que $s_1 - s_{(\mathrm{eq})} > 0$. Le système revient à l'équilibre si la force qui s'exerce sur lui est orientée dans le sens contraire au déplacement qu'on a imposé.



Or les seules forces qui ont une composantes suivant s sont celles qui travaillent d'après ce qu'on a vu précédemment. Il faut donc que $F_{s_1} < 0$, soit, comme $K > 0$ et d'après (11), que $F_{(s_1)} < 0$. D'après (12), le système revient donc à sa position d'équilibre si :

$$\left(\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}s}\right)_{s=s_1} = -F_{(s_1)} > 0 \qquad \text{pour } s_1 > s_{\mathrm{eq}} \tag{15}$$

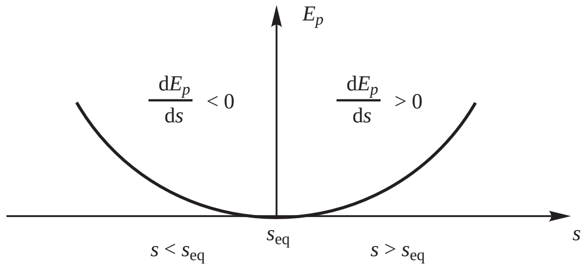
Inversement, si on écarte le système de sa position d'équilibre jusqu'à la position $s_2 < s_{\mathrm{eq}}$, il y revient s'il est soumis à une force totale dont la composante suivant $\vec{u}_s$ est orientée dans le sens contraire au déplacement imposé.



Cela correspond maintenant à $F_{s_2} > 0$ soit $F_{(s_2)} > 0$, c'est-à-dire que le système revient à sa position d'équilibre si :

$$\left(\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}s}\right)_{s=s_2} = -F_{(s_2)} < 0 \qquad \text{pour } s_2 < s_{\mathrm{eq}} \tag{16}$$

L'allure la courbe donnant l'énergie potentielle en fonction de s au voisinage de la position d'équilibre s_{eq} doit donc être la suivante :

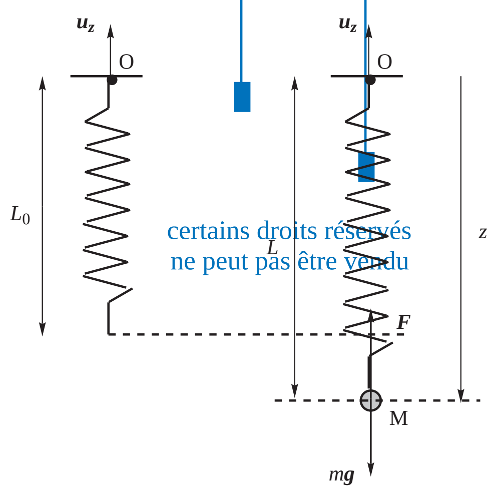


En d'autres termes, une **position d'équilibre stable** correspond à un ***minimum* d'énergie potentielle**, soit :

$$\boxed{\left(\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}s}\right)_{s=s_{\text{eq}}} = 0 \quad \textbf{et} \quad \left(\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}s^2}\right)_{s=s_{\text{eq}}} > 0} \tag{17}$$

1.3.3 Exemple d'équilibre stable.

Considérons un point matériel M de masse m, accrochée à l'extrémité d'un ressort vertical de longueur à vide L_0 et de constante de raideur k. La masse m est soumise à son poids et à la force de rappel du ressort. Prenons comme origine le point d'accrochage du ressort O, et définissons un vecteur vertical $\vec{u}_z$ vers le haut ; soit z la cote de M.



Déterminons l'allongement du ressort à l'équilibre, ce qui revient à déterminer la longueur du ressort à l'équilibre L_{eq}. Comme les deux seules forces qui s'exercent sont le poids de m et la force de rappel du ressort $\vec{F}$, on a :

$$m\vec{g} + k\left(L_{\text{eq}} - L_0\right)\vec{u}_z = 0 \Rightarrow -mg + k\left(L_{\text{eq}} - L_0\right) = 0 \Rightarrow L_{\text{eq}} - L_0 = \frac{mg}{k} \tag{18}$$

À l'équilibre, les deux forces sont d'intensité égale, mais opposées. Si on ecarte vers le bas la masse m, l'allongement est augmenté ; la force de rappel du ressort (vers le haut) augmente en intensité, alors que la force vers le bas (le poids) est inchangée. La force globale est donc vers le haut, et le système est ramené à sa position initiale. Inversement, si on tire la masse m vers le haut, l'allongement est diminué et la force de rappel du ressort est moins intense ; comme la force vers le bas est inchangée, la force globale est vers le bas, et le système est ramené à sa position initiale. La position d'équilibre est donc stable.

Raisonnons maintenant sur l'énergie potentielle. La cote du point M est z, avec ici $z < 0$. D'autre part, si L est la longueur du ressort, son allongement est $L - L_0 = -z - L_0$. L'énergie potentielle du système est la somme des énergies potentielles associées aux deux forces conservatives qui s'exercent :

$$E_p = mgz + \frac{1}{2}k\left(-z - L_0\right)^2 + K \tag{19}$$

où K est une constante arbitraire. La position d'équilibre correspond à un *extremum* d'énergie potentielle. Calculons la dérivée de E_p par rapport au paramètre du problème z :

$$\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}z} = mg + k\left(-1\right) \times \left(-z - L_0\right) = kz + kL_0 + mg \tag{20}$$

L'équilibre correspond à :

$$\left(\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}z}\right)_{z=z_{\mathrm{eq}}} = 0 \Rightarrow kz_{\mathrm{eq}} + kL_0 + mg = 0 \Rightarrow z_{\mathrm{eq}} = -L_0 - \frac{mg}{k} \tag{21}$$

Ceci correspond bien à une longueur du ressort égale à $L_{\mathrm{eq}} = -z_{\mathrm{eq}} = L_0 + mg/k$. On peut noter qu'on pouvait également raisonner en prenant un vecteur $\vec{u}_z$ vers le bas, ou en prenant une autre origine. Dans tous les cas, on obtient évidemment le même résultat.

La stabilité de l'équilibre est discutée à l'aide de la dérivée seconde. Comme celle-ci est toujours positive, et l'est donc en particulier à $z = z_{\mathrm{eq}}$, la position d'équilibre est stable. En effet :

$$\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}z^2} = k \tag{22}$$

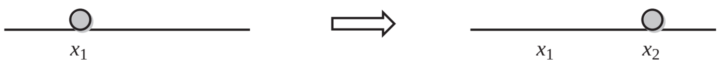
1.3.4 Équilibre instable et équilibre indifférent.

Une position d'équilibre est instable si, écarté de cette position, le système est soumis à une force globale dans le même sens que la perturbation, c'est-à-dire dans le sens qui accroit l'écart. On démontre facilement qu'une **position d'équilibre instable** correspond à un **maximum d'énergie potentielle**, soit :

$$\boxed{\left(\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}s}\right)_{s=s_{\mathrm{eq}}} = 0 \quad \textbf{et} \quad \left(\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}s^2}\right)_{s=s_{\mathrm{eq}}} \leq 0} \tag{23}$$

Considérons maintenant le cas d'une bille posée sur un support horizontal. Si on écarte la bille de sa position d'équilibre, elle reste dans cette nouvelle position, sans revenir à sa position d'équilibre initiale ni s'en écarter. L'équilibre est qualifié d'**indifférent**. Dans cette situation, sur un intervalle de s autour de s_{eq}, on a :

$$\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}s^2} = 0 \tag{24}$$



2 Le modèle de l'oscillateur harmonique à une dimension.

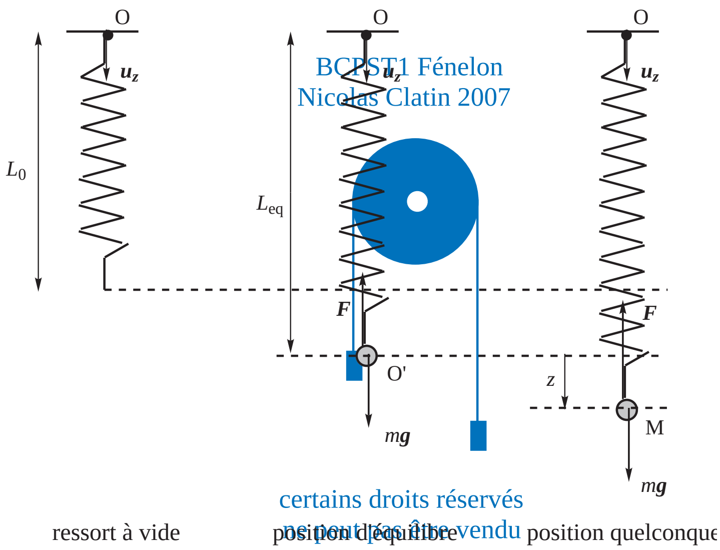
Le modèle de l'oscillateur harmonique à une dimension est d'une très grande généralité en physique, et décrit le comportement de systèmes dans des domaines aussi divers que l'électrocinétique ou la mécanique, avec des applications en chimie, en particulier pour modéliser la liaison chimique. En mécanique, l'oscillateur harmonique correspond typiquement au comportement d'un système légèrement écarté d'une position d'équilibre stable.

2.1 Exemples ; équation différentielle.

2.1.1 Exemple du ressort.

Considérons un ressort vertical de longueur à vide L_0 et de constante de raideur k, auquel on accroche un point matériel M de masse m. On définit un vecteur unitaire vertical vers le bas $\vec{u}_z$ (on pourrait évidemment aussi bien l'orienter vers le haut). Cherchons la condition vérifiée par la longueur du ressort à l'équilibre L_{eq}. À l'équilibre, la somme des forces appliquées est nulle, soit, en appelant $\vec{F}$ la force de rappel du ressort :

$$m\vec{g} + \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow mg - k\left(L_{\text{eq}} - L_0\right) = 0 \tag{25}$$



On écarte maintenant la masse m de sa position d'équilibre, par exemple en la tirant légèrement vers le bas. On cherche l'équation différentielle du mouvement. Il est commode de choisir une nouvelle origine des altitudes O′ au niveau de la position d'équilibre. La cote z du point M correspond alors à son écart par rapport à cette position d'équilibre. En considérant que l'écartement initial se fait selon la verticale, le mouvement est entièrement selon la verticale, soit :

$$\overrightarrow{\mathrm{O'M}} = z\,\vec{u}_z \tag{26}$$

$$\vec{v} = \dot{z}\,\vec{u}_z \tag{27}$$

$$\vec{a} = \ddot{z}\,\vec{u}_z \tag{28}$$

La première méthode consiste à raisonner sur les forces, c'est-à-dire à appliquer le principe fondamental de la dynamique. En un point M quelconque de cote z (par rapport à la cote à l'équilibre), l'allongement du ressort est $L_{\text{eq}} + z - L_0$, z étant algébrique. Le mouvement et toutes les forces étant uniquement suivant la verticale, on peut directement raisonner en projection.

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F} \Rightarrow m\ddot{z} = mg - k\left(L_{\text{eq}} + z - L_0\right) = mg - k\left(L_{\text{eq}} - L_0\right) - kz \tag{29}$$

En utilisant la relation à l'équilibre (25), cette expression se simplifie, et il reste :

$$m\ddot{z} + kz = 0 \Rightarrow \ddot{z} + \frac{k}{m} z = 0 \tag{30}$$

Cette équation peut se retrouver par un raisonnement énergétique. L'énergie cinétique de la masse m est par définition et en utilisant (27) :

$$E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\dot{z}^2}{2} \tag{31}$$

D'autre part, l'énergie potentielle est la somme de l'énergie potentielle de pesanteur et de l'énergie potentielle élastique. L'axe vertical étant orienté vers le bas, l'énergie potentielle de pesanteur est de la forme $-mgz$, où le signe ne doit pas être oublié. D'autre part, l'énergie potentielle élastique est fonction de l'allongement réel du ressort, c'est-à-dire par rapport à sa longueur à vide (et non par rapport à sa longueur à l'équilibre). On a donc :

$$E_p = -mgz + \frac{1}{2} k \left(L_{\text{eq}} + z - L_0\right)^2 + \lambda \tag{32}$$

où λ est une constante arbitraire. L'énergie mécanique de la masse m est la somme des énergies cinétique et potentielle :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{m\dot{z}^2}{2} - mgz + \frac{1}{2} k \left(L_{\text{eq}} + z - L_0\right)^2 + \lambda \tag{33}$$

Comme les deux seules forces qui s'appliquent sont conservatives, l'énergie mécanique est une constante du mouvement, c'est-à-dire qu'elle est la même au cours du temps. On a donc :

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{34}$$

En se rappelant que z est une fonction du temps, on en déduit :

$$\begin{aligned} \frac{m}{2} \times 2\ddot{z}\dot{z} - mg\dot{z} + \frac{k}{2} \times 2\dot{z} \left(L_{\text{eq}} + z - L_0\right) = 0 \Rightarrow m\ddot{z} - mg + k\left(L_{\text{eq}} + z - L_0\right) = 0 \\ \Rightarrow m\ddot{z} + kz - mg + k\left(L_{\text{eq}} - L_0\right) = 0 \end{aligned} \tag{35}$$

Le dernier terme est nul, puisque c'est la condition d'équilibre (25), et on retrouve l'équation différentielle (30).

On peut noter que le résultat aurait été exactement le même si on avait orienté $\vec{u}_z$ dans le sens opposé, et si on avait choisi une autre origine des cotes. En effet, changer l'altitude 0 revient à ajouter une constante à z, autrement dit à changer la constante dans la formule de l'énergie potentielle. À l'issue de la dérivation, cela n'a évidemment aucune incidence.

2.1.2 Exemple du pendule.

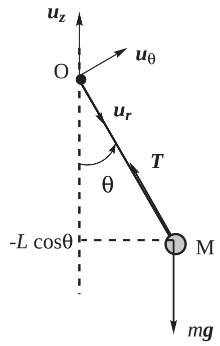
On considère maintenant un fil sans masse de longueur L accroché à son extrémité supérieure à un point O fixe. Un point matériel M de masse m est fixé à son extrémité inférieure. Le fil est initialement vertical et le point M est au repos. On écarte la masse m de la verticale, et on cherche l'équation différentielle du mouvement.

Il est évident que le mouvement est dans un plan vertical, et que la trajectoire de M est circulaire de centre O. Les coordonnées polaires sont donc adaptées à ce problème. Soit la base locale $(\mathrm{O}, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$. On peut écrire :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = L\vec{u}_r \tag{36}$$

$$\vec{v} = L\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta \tag{37}$$

$$\vec{a} = -L\dot{\theta}^2\vec{u}_r + L\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta \tag{38}$$



La première méthode consiste à raisonner sur les forces. Appliquons le principe fondamental de la dynamique, et projetons selon les deux vecteurs de base $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$.

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T} \Rightarrow \begin{cases} -mL\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - T \\ mL\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \end{cases} \tag{39}$$

De la seconde relation, on déduit l'équation différentielle vérifiée par le paramètre θ :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0 \tag{40}$$

On peut parvenir au même résultat par un raisonnement énergétique. L'énergie cinétique de la masse m est :

$$E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{mL^2\dot{\theta}^2}{2} \tag{41}$$

Évaluons l'énergie potentielle, sachant que seul le poids est à prendre en compte, puisque la tension du fil ne travaille pas. Définissons un vecteur unitaire $\vec{u}_z$ selon la verticale et vers le haut (attention ! ce n'est pas le vecteur de la base locale en coordonnées cylindriques). L'énergie potentielle est :

$$E_p = mgz = -mgL\cos\theta \tag{42}$$

L'énergie mécanique a donc pour expression :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{mL^2\dot{\theta}^2}{2} - mgL\cos\theta \tag{43}$$

Comme le poids est conservatif et que la tension du fil ne travaille pas, il y a conservation de l'énergie mécanique au cours du temps. En n'oubliant pas que θ est une fonction de t, et en dérivant correctement les composées de fonction, on a donc :

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow \frac{2mL^2\ddot{\theta}\dot{\theta}}{2} + mgL\dot{\theta}\,\sin\theta = 0 \Rightarrow L\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0 \tag{44}$$

On retrouve bien l'équation différentielle (40). Dans le cas où on écarte peu la masse de sa position d'équilibre, soit si θ reste petit, on peut faire l'approximation : $\sin\theta \approx \theta$. L'équation différentielle devient alors :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0 \tag{45}$$

2.1.3 Équation différentielle du mouvement.

Dans le cas du ressort comme dans le cas du pendule pour les petits angles, l'équation différentielle est de la forme :

$$\boxed{\ddot{s} + \omega_0^2\, s = 0} \tag{46}$$

où s est le paramètre du problème (on rappelle qu'on se limite aux problèmes à un seul paramètre). Le facteur devant s est positif (k/m pour le ressort, g/L pour le pendule), et peut donc toujours être écrit sous forme d'un carré.

Tout système physique dont le comportement vérifie une telle équation différentielle est qualifié d'**oscillateur harmonique à une dimension**. Le circuit oscillant constitué d'un condensateur idéal en série avec une bobine idéale en est un autre exemple vu cette année.

2.2 Résolution de l'équation différentielle.

2.2.1 Solution générale.

La solution de l'équation différentielle (46) peut s'écrire de deux façons équivalentes :

$$s_{(t)} = A\,\cos\omega_0 t + B\,\sin\omega_0 t \qquad \text{ou} \qquad \boxed{s_{(t)} = S_0\,\cos\left(\omega_0 t + \varphi\right)} \tag{47}$$

Dans les deux cas, il apparait deux constantes d'intégration (A et B ou S_0 et φ), qui s'obtiennent à l'aide des conditions initiales

2.2.2 Exemple de conditions initiales.

Supposons par exemple que le ressort de l'exemple du paragraphe 2.1.1 soit écarté de sa position d'équilibre de Z_0 vers le bas (soit $Z_0 > 0$ avec la convention choisie pour $\vec{u}_z$), et laché sans vitesse initiale à l'instant $t = 0$. La solution de l'équation différentielle est de la forme :

$$z_{(t)} = S_0\,\cos\left(\omega_0 t + \varphi\right) \qquad \text{avec} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{48}$$

D'autre part, la vitesse est :

$$\dot{z} = -S_0\omega_0\,\sin\left(\omega_0 t + \varphi\right) \tag{49}$$

À l'instant initial, on a :

$$z_{(0)} = Z_0 = S_0\,\cos\varphi \tag{50}$$

$$\dot{z}_{(0)} = 0 = -S_0\omega_0\,\sin\varphi \tag{51}$$

De la seconde équation, on déduit $\varphi = 0$ (la solution $S_0 = 0$ correspond à $z_{(t)} = 0$, c'est-à-dire au système restant en permanence à sa position d'équilibre). En reportant dans la première, on a $Z_0 = S_0$. En définitive, le mouvement est de la forme :

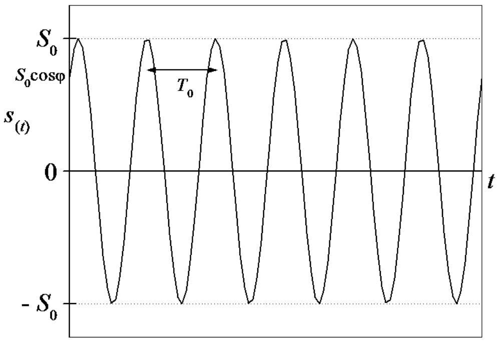
$$z_{(t)} = Z_0\,\cos\omega_0 t \qquad \text{avec} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{52}$$

2.2.3 Analyse du mouvement.

Le mouvement est de type oscillatoire, puisque le paramètre du problème suit une loi sinusoïdale. Son amplitude est S_0 et sa pulsation vaut ω_0, ce qui correspond à une période :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \tag{53}$$

Au cours du temps, le paramètre du mouvement qui est égal ou directement relié à l'écart à la position d'équilibre, reste compris entre les deux valeurs extrêmes $+S_0$ et $-S_0$. Le système reste donc confiné autour de la position d'équilibre ; il est dans un état lié.



On remarque que la période du mouvement est indépendante de l'écartement initial, puisqu'elle ne dépend que des caractéristiques intrinsèques du système ou de constantes (g et L pour le pendule, k et m pour le ressort).

Dans le cas de l'oscillateur harmonique, le système oscille indéfiniment autour de sa position d'équilibre. Dans la réalité, il existe des frottements qui tendent à diminuer petit à petit l'amplitude du mouvement. Le système est qualifié d'oscillateur amorti, et son étude est au programme de seconde année.

Dans tous les cas, la position du système est directement reliée à la grandeur $s_{(t)}$, dont la forme est donnée par l'équation (47). La vitesse du système est reliée à la dérivée de $s_{(t)}$:

$$s_{(t)} = S_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) \tag{54}$$

$$\dot{s} = -S_0\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = S_0\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi/2) \tag{55}$$

On constate que la vitesse et la position sont en quadrature de phase. Lorsque le mobile est écarté au maximum de la position d'équilibre, soit si $|\cos(\omega_0 t + \varphi)| = 1$, alors $\sin(\omega_0 t + \varphi) = 0$ et $\dot{s} = 0$, c'est-à-dire que la vitesse est nulle. À cet instant, le mobile change de sens de déplacement, ce qui implique une annulation de la vitesse. Inversement, lorsque le mobile passe par la position d'équilibre, soit $\cos(\omega_0 t + \varphi) = 0$, alors $|\sin(\omega_0 t + \varphi)| = 1$ et la vitesse est maximale.

2.3 Aspect énergétique.

2.3.1 Énergie cinétique et énergie potentielle.

Raisonnons sur l'exemple du point matériel M de masse m suspendu à l'extrémité du ressort vertical, et laché sans vitesse initiale après avoir été écarté de Z_0 de sa position d'équilibre. Le point M oscille autour de sa position d'équilibre. On rappelle que si z est l'écart à la position d'équilibre, on a :

$$z = Z_0 \cos \omega_0 t \tag{56}$$
$$\dot{z} = -Z_0 \omega_0 \sin \omega_0 t \tag{57}$$

Le mouvement étant uniquement suivant la verticale, la vitesse est uniquement suivant cette direction, soit : $\vec{v} = \dot{z}\, \vec{u}_z$. L'énergie cinétique a donc pour expression :

$$E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\dot{z}^2}{2} = \frac{mZ_0^2\omega_0^2}{2} \times \sin^2 \omega_0 t \tag{58}$$

Calculons l'énergie potentielle du système. Remarquons tout d'abord que le système n'est soumis qu'à deux forces, qui dérivent toutes les deux d'une énergie potentielle. Celle-ci est donc la somme de l'énergie potentielle de pesanteur et de l'énergie potentielle élastique. En prenant comme origine des altitudes la position d'équilibre et en se rappelant que le vecteur unitaire $\vec{u}_z$ est orienté vers le bas, l'énergie potentielle est donnée par (31) :

$$E_p = -mgz + \frac{1}{2}\, k\, (L_{\text{eq}} + z - L_0)^2 + \lambda = -mgz + k\, (L_{\text{eq}} - L_0)\, z + \frac{1}{2}\, k\, z^2 + \frac{1}{2}\, k\, (L_{\text{eq}} - L_0)^2 + \lambda \tag{59}$$

où λ est une constante arbitraire. Il est commode de la choisir telle que :

$$\frac{1}{2}\, k\, (L_{\text{eq}} - L_0)^2 + \lambda = 0 \tag{60}$$

ce qui permet de se ramener à une expression plus simple de l'énergie potentielle :

$$E_p = [-mg + k\, (L_{\text{eq}} - L_0)] \times z + \frac{1}{2}\, k\, z^2 \tag{61}$$

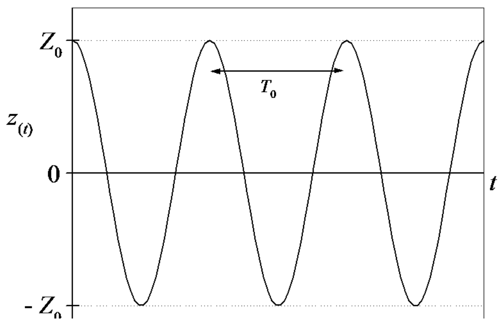
Le terme entre crochets et nul, puisqu'il s'agit de la condition vérifiée à l'équilibre. En définitive, l'énergie potentielle totale du système est :

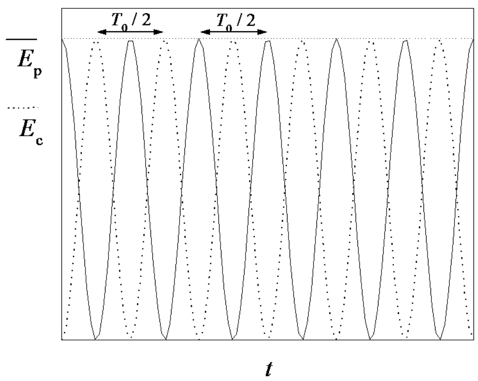
$$E_p = \frac{kz^2}{2} = \frac{kZ_0^2}{2} \times \cos^2 \omega_0 t \tag{62}$$

D'une façon générale, dans les **oscillateurs harmoniques à une dimension** dépendant du paramètre s, et sous réserve d'un choix judicieux de la constante dans l'expression de l'énergie potentielle :

> l'énergie potentielle est proportionnelle à s^2 et
> l'énergie cinétique est proportionnelle à $\dot{s}^2$.

L'énergie cinétique et l'énergie potentielle varient périodiquement au cours du temps, avec une période égale à $T_0/2$. On peut noter que lorsque l'énergie cinétique est nulle, soit $\sin^2 \omega_0 t = 0$, l'énergie potentielle est maximale car $\cos^2 \omega_0 t = 1$; inversement, lorsque l'énergie cinétique est maximale, l'énergie potentielle est minimale (nulle avec le choix des constantes qui a été fait), autrement dit E_c et E_p varient en opposition de phase. Cela est à mettre en correspondance avec le fait que la vitesse est maximale lorsque le système passe par la position d'équilibre, alors qu'elle est nulle lorsque l'écart à la position d'équilibre est maximal.





2.3.2 Énergie mécanique ; interconversion entre énergie potentielle et énergie cinétique.

Toujours en analysant l'exemple du ressort, l'énergie mécanique est la somme des énergies cinétique et potentielle données par (58) et (62) :

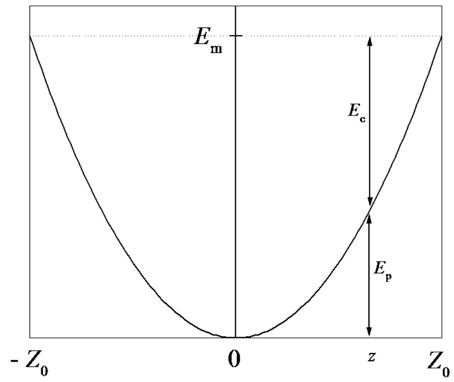
$$E_m = E_c + E_p = \frac{m\omega_0^2 Z_0^2}{2}\sin^2\omega_0 t + \frac{kZ_0^2}{2}\cos^2\omega_0 t = \frac{kZ_0^2}{2} \times \left(\frac{m\omega_0^2}{k}\sin^2\omega_0 t + \cos^2\omega_0 t\right) \tag{63}$$

Or dans le cas du ressort et d'après (52), on a $m\omega_0^2/k = 1$. En conséquence le terme entre parenthèses est égal à 1 :

$$E_m = \frac{kZ_0^2}{2} \times \left(\sin^2\omega_0 t + \cos^2\omega_0 t\right) = \frac{kZ_0^2}{2} \tag{64}$$

L'énergie mécanique est donc indépendante du temps, ce qui est attendu puisque le système n'est soumis qu'à des forces conservatives. Ceci est évidemment général à tout oscillateur harmonique. Comme néanmoins l'énergie cinétique et l'énergie potentielle sont toutes les deux variables au cours du temps, c'est que leurs variations se compensent : lorsque l'énergie cinétique décroit, l'énergie potentielle croit d'une quantité égale, et inversement. On dit qu'il y a **interconversion entre énergie cinétique et énergie potentielle** au cours du mouvement oscillatoire.

D'après (62), l'énergie potentielle varie avec l'écart à la position d'équilibre z selon une loi parabolique, dont le minimum est à 0 si on a fait un choix judicieux de la constante (mais cela ne change rien au raisonnement).



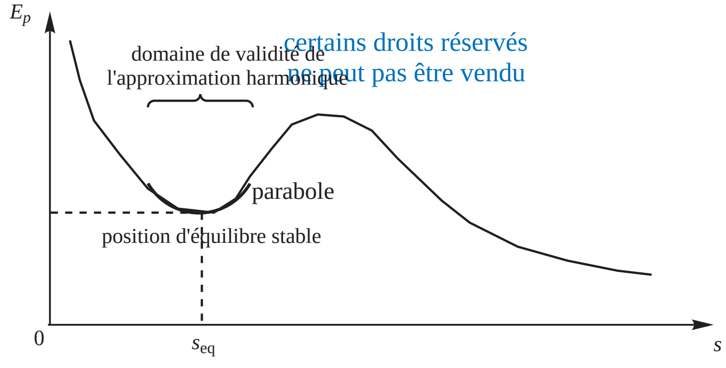
L'énergie mécanique du système est égale à la valeur maximale de l'énergie potentielle (correspondant au cas où l'énergie cinétique est nulle). On peut visualiser sur la courbe, à une position z donnée, l'énergie potentielle (donnée par la courbe), ainsi que l'énergie cinétique.

L'interconversion entre énergie potentielle et énergie cinétique a la signification physique suivante :

- partant de la position d'équilibre ($E_p = 0$ et E_c maximale), l'énergie cinétique est progressivement convertie en énergie potentielle ; le système emmagasine de l'énergie, qui est stockée sous forme d'énergie potentielle ;
- lors du retour vers la position d'équilibre, l'énergie potentielle est progressivement convertie en énergie cinétique ; le système restitue l'énergie stockée dans la phase précédente.

2.3.3 Importance du modèle de l'oscillateur harmonique.

Le modèle de l'oscillateur harmonique est d'une importance fondamentale en physique. Considérons un système dont l'énergie potentielle dépend d'un unique paramètre s, selon la courbe suivante.



Au niveau de la cuvette d'énergie potentielle, il est toujours possible de considérer que, autour du minimum, la courbe est approximativement parabolique, autrement dit qu'il est possible d'interpoler la courbe réelle d'énergie potentielle par une parabole, au voisinage du minimum. Ceci constitue l'**approximation harmonique**. En conséquence, il est toujours possible de considérer qu'au voisinage d'une position d'équilibre stable (correspondant au minimum d'énergie potentielle), c'est-à-dire pour tout état lié proche de sa position d'équilibre, le système se comporte en première approximation comme un oscillateur harmonique.

Cette approximation est très intéressante, car le modèle de l'oscillateur harmonique est d'une grande simplicité : l'équation différentielle est triviale et les solutions parfaitement connues. L'approximation harmonique a des applications très fructueuses en chimie : une liaison covalente, animée de mouvement de vibration autour de sa longueur d'équilibre, est typiquement au voisinage d'une position d'équilibre stable et a un comportement d'oscillateur harmonique : on la modélise par un ressort vibrant autour de sa longueur à vide.