**OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE**

**chapitre 3**

# Lentilles minces

De nombreux dispositifs optiques font appel à des lentilles, qui sont les systèmes les plus simples permettant d'obtenir une image de taille différente de l'objet, sans déformation notable tant qu'on se trouve dans les conditions de Gauss. Les verres de lunettes, les téléscopes, les loupes, les microscopes, les objectifs des appareils photographiques, et l'œil lui-même, sont ou comportent des lentilles.

Cependant, les lentilles ne sont pas des dispositifs parfaits. En effet, si on s'éloigne des conditions de Gauss, il apparait des déformations, principalement sur les bord des images. Ceci oblige à inclure des dispositifs correcteurs, comme il en existe dans les appareils photos, et sans lesquels il serait impossible de faire des photos en grand angle.

Les lentilles se présentent généralement sous formes de lames de verre dont les bords ont une forme appropriés. L'utilisation du verre ne permet cependant de travailler que dans le domaine visible. La réalisation d'une lentille adaptée au domaine des rayons X est nettement plus compliquée, car la plupart des matériaux absorbent les rayons X ; ainsi l'objet physique jouant le rôle de lentille à rayons X ne ressemble en rien à un verre de lunette.



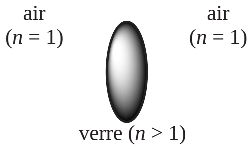
Plan du chapitre.

1. Définition et propriétés
   1.1 Lentilles convergentes et lentilles divergentes
   1.2 Une lentille est un système centré
   1.3 Une lentille est un système focal
   1.4 Stigmatisme et aplanétisme
2. Construction des images et des faisceaux à travers une lentille
   2.1 Construction de l'image d'un objet par une lentille convergente
   2.2 Construction de la marche d'un faisceau à travers une lentille convergente
3. Formules de conjugaison
   3.1 Avec origine au centre optique : formule de Descartes
   3.2 Avec origine aux foyers : formule de Newton

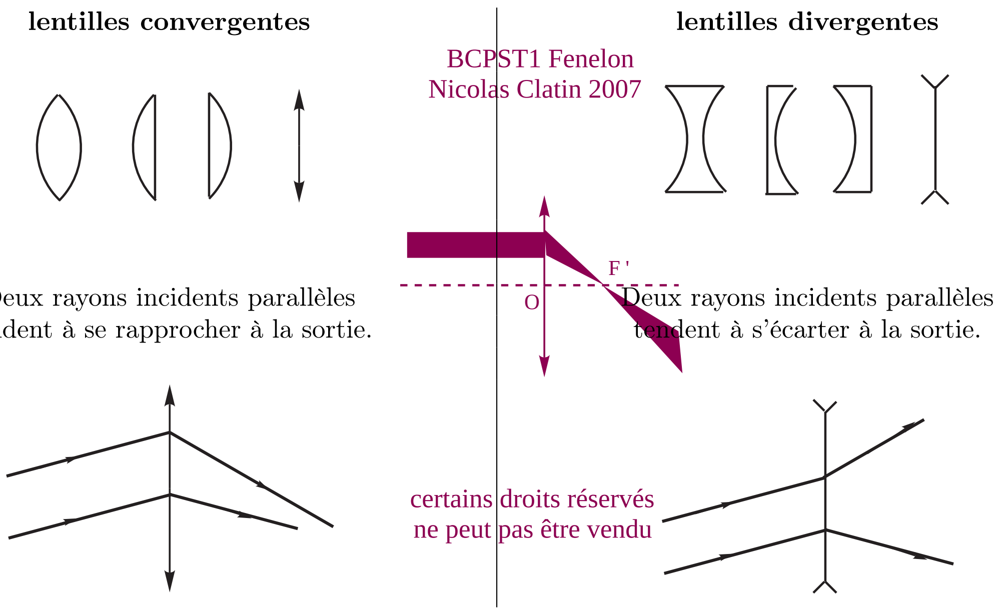
# 1 Définition et propriétés.

## 1.1 Lentilles convergentes et lentilles divergentes.

Une lentille est un milieu transparent d'indice optique donné (verre organique ou minéral dans le domaine des longueurs d'onde visibles), séparé du milieu extérieur par deux surfaces dioptriques, dont une est sphérique et l'autre sphérique ou plane. Dans toute la suite du cours, on suppose que le milieu extérieur est le même (généralement l'air) des deux côtés de la lentille.



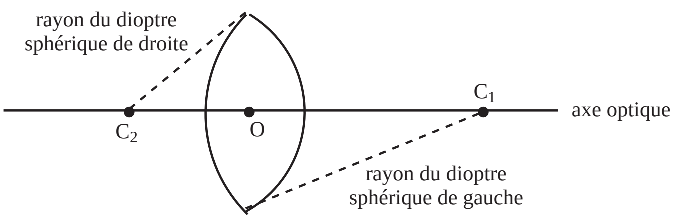

On distingue deux familles de lentilles en fonction de la convexité des surfaces dioptriques. Elles ont un effet opposé sur la marche de rayons incidents parallèles entre eux.



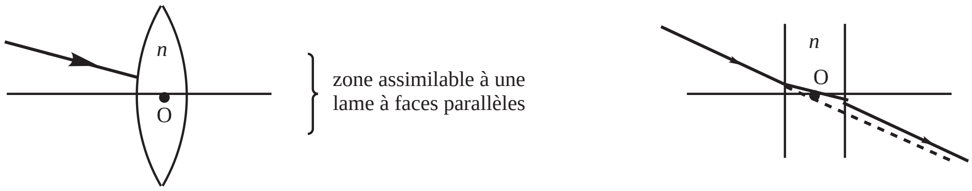



## 1.2 Une lentille est un système centré.

Le système optique constitué de la lentille possède un axe de révolution, appelé **axe optique**. Il passe par le centre géométrique de la lentille et le(s) centre(s) ($C_1$ et $C_2$) du ou des dioptres sphériques.




Considérons un rayon arrivant sur la lentille proche de l'axe optique. Cette zone de la lentille peut être assimilée à une lame à faces parallèles. D'après ce qu'on a vu au chapitre précédent, le rayon émergent est alors parallèle au rayon incident, mais est décalé par rapport à lui.




Dans le cas d'une **lentille mince**, ce qui est réalisé si les surfaces dioptriques sphériques sont de très grand rayon, la zone autour de l'axe optique est assimilable à une lame à faces parallèles très mince. Dans ce cas, le rayon émergent n'est quasiment pas décalé par rapport au rayon incident.

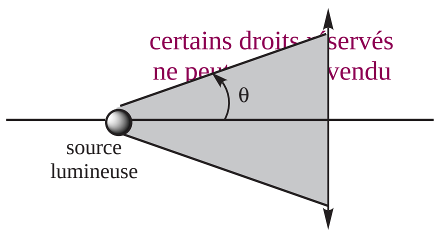
Un rayon passant par le centre d'une lentille mince, appelé **centre optique** et noté O, n'est **pas dévié**.



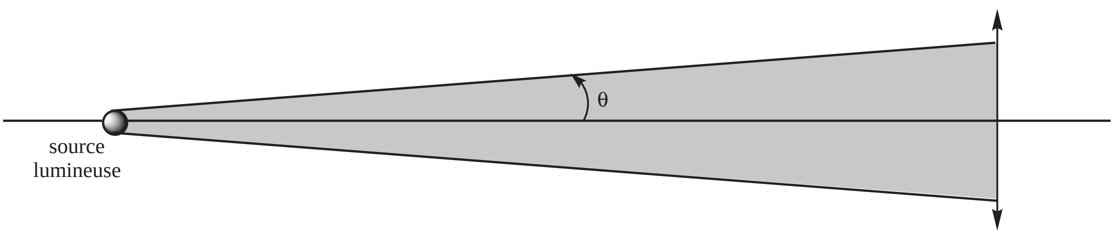

## 1.3 Une lentille est un système focal.

### 1.3.1 Foyer image et plan focal image.

Considérons une lentille sur laquelle arrive un faisceau parallèle à l'axe optique, c'est-à-dire un ensemble de rayons tous parallèles à l'axe optique. Un tel faisceau ne peut être émis que par une source située à l'infini de la lentille. En effet, une source sur l'axe optique à distance finie émet vers la lentille des rayons selon un cône d'angle au sommet $\theta$ ; ils arrivent sur la lentille avec des angles d'incidence variables.




Si on éloigne la source de la lentille, l'angle au sommet du cône diminue progressivement. À la limite, lorsque la source est très loin, $\theta \to 0$ et tous les rayons arrivent parallèlement à l'axe optique. En pratique, une étoile, voire le Soleil, constituent des sources de rayons quasiment parallèles.




On peut montrer, sous réserve de faire l'étude théorique des lentilles (hors programme), que :

Tous les rayons incidents parallèles à l'axe optique convergent en un point de l'axe optique, appelé **foyer image** et noté F′ :
- situé après la lentille si elle est convergente,
- situé avant la lentille si elle est divergente.

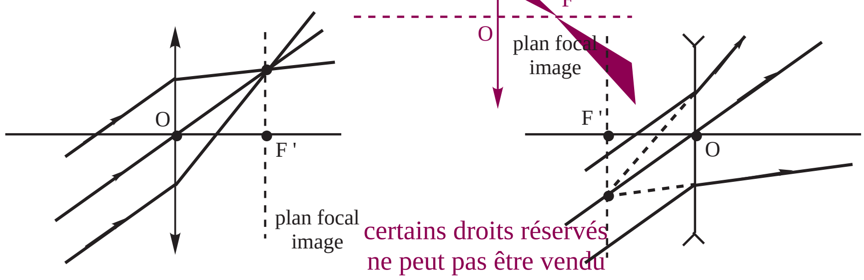

Dans la cas d'une lentille convergente, les rayons émergents passent réellement par le foyer image. En revanche, si la lentille est divergente, les rayons émergents ne passent pas par F′, mais semblent en venir à la sortie de la lentille.

Le foyer image est donc le lieu où convergent les rayons émis par une source située à l'infini sur l'axe optique ; F′ est donc le point conjugué de l'infini sur l'axe avant la lentille :

$$\infty \xrightarrow{L} F'$$



Le plan perpendiculaire à l'axe optique et passant par F′ est appelé le **plan focal image**. On peut montrer que des **rayons incidents parallèles émergent en passant par un unique point du plan focal image**. Ce point est facilement déterminé à l'aide du rayon parallèle aux précédents et passant par le centre optique ; comme il n'est pas dévié, sa marche après la lentille est facile à construire.






### 1.3.2 Foyer objet et plan focal objet.

Une lentille présente un foyer objet, situé de l'autre côté du centre optique par rapport au foyer image, et aux propriétés symétriques.

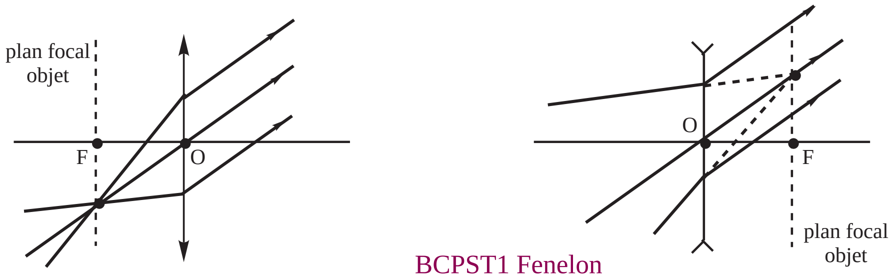
Tous les rayons émergeant parallèles à l'axe optique ont convergé en un point de l'axe optique, appelé **foyer objet** et noté F :
- situé avant la lentille si elle est convergente,
- situé après la lentille si elle est divergente.

Dans la cas d'une lentille convergente, les rayons incidents passent réellement par le foyer image. En revanche, si la lentille est divergente, les rayons incidents ne passent pas par F, mais semblent s'y diriger à l'entrée de la lentille.

Les rayons émergents parallèles à l'axe se propagent jusqu'à l'infini sans se couper. En conséquence, F est le point conjugué de l'infini sur l'axe après la lentille :

$$\mathrm{F} \xrightarrow{\mathrm{L}} \infty$$

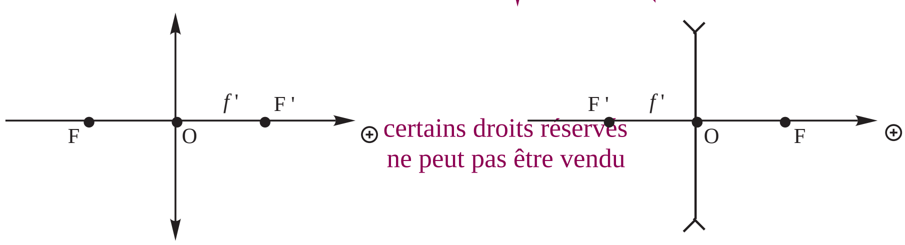
Le plan perpendiculaire à l'axe optique et passant par F est appelé le **plan focal objet**. On peut montrer que des **rayons émergents parallèles sont passés par un unique point du plan focal objet**






### 1.3.3 Distance focale.

Dans toute la suite du cours, il est nécessaire d'orienter l'axe optique. Usuellement, on choisit de l'orienter dans le sens de propagation de la lumière. Si la source est à gauche, l'axe est donc orienté de la gauche vers la droite. Bien évidemment, en présence d'un miroir, la lumière se propage dans le sens opposé après réflexion.






On appelle distance focale image de la lentille la **longueur algébrique** du centre optique au foyer image :

$$f' = \overline{\mathrm{OF'}} \tag{1}$$

Dans le cas des lentilles minces usuelles avec un milieu de même indice optique de part et d'autre, le foyer objet est symétrique du foyer image par rapport au centre optique. La distance focale objet (entre O et F) est alors exactement opposée à la distance focale image. Dans toute la suite du cours, on parlera donc de la **distance focale** de la lentille, ou encore de la **focale** :

$$\boxed{f' = \overline{\mathrm{OF'}} = -\overline{\mathrm{OF}}} \tag{2}$$

C'est une distance algébrique caractéristique de la lentille ; elle a pour unité le mètre, et possède un signe. D'après ce qu'on a vu au paragraphe précédent, le signe de $f'$ est fonction du caractère convergent ou divergent de la lentille.

| |
|---|
| Pour une lentille convergente, $f' > 0$ ; |
| Pour une lentille divergente, $f' < 0$. |

On définit également la **vergence** d'une lentille, qui n'est autre que l'inverse de la distance focale :

$$v = \frac{1}{f'} \tag{3}$$

Son unité est la *dioptrie* (symbole $\delta$), avec $1\ \delta = 1\ \mathrm{m}^{-1}$.

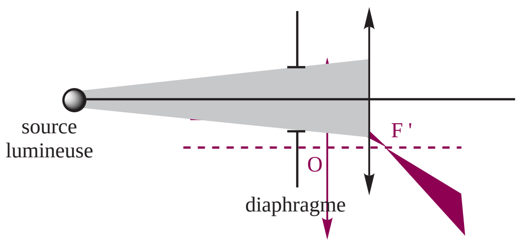
## 1.4 Stigmatisme et aplanétisme.

Tous les systèmes optiques dans le cadre du cours seront étudiés exclusivement dans les conditions de Gauss, dont on a déjà parlé dans le cas du dioptre plan. Pour les lentilles, il faut les préciser :

| |
|---|
| On se trouve dans les **conditions de Gauss** si :<br>• les rayons sont peu inclinés sur l'axe optique,<br>• ET les rayons arrivent sur la lentille proches de l'axe optique. |

Afin de se trouver dans les conditions de Gauss, il est souvent commode de faire précéder le système optique d'un diaphragme, ouverture qui ne laisse passer que les rayons proches de l'axe.

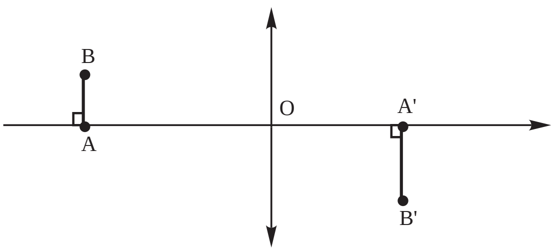





Dans les conditions de Gauss, on peut montrer que l'image d'un point par une lentille est une tache de dimension très petite, assimilable à un point. Par ailleurs, l'image d'un objet perpendiculaire à l'axe optique est elle-même quasiment perpendiculaire à l'axe optique.



| |
|---|
| Une lentille est approximativement **stigmatique** et **aplanétique** dans les conditions de Gauss. |



# 2 Construction des images et des faisceaux à travers une lentille.

## 2.1 Construction de l'image d'un objet par une lentille convergente.

Le problème est de construire l'image d'un objet à travers la lentille. Comme la lentille est aplanétique, l'image a la même forme que l'objet dans les conditions de Gauss. La construction de l'image d'un objet revient alors à déterminer les images des extrémités de l'objet. Le problème se ramène donc à construire l'image par la lentille d'une petite tige AB, qu'on prend par exemple perpendiculaire à l'axe optique, le point A étant sur l'axe :

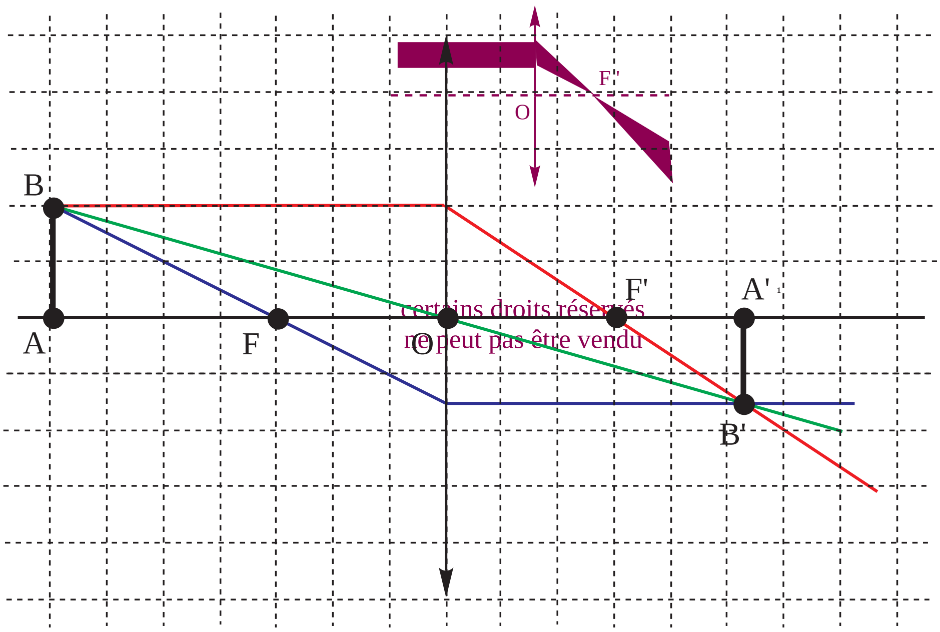
$$\mathrm{AB} \xrightarrow{\mathrm{L}} \mathrm{A'B'}$$

Comme la lentille est stigmatique dans les conditions de Gauss, l'image du point B est un point B′. Tous les rayons passant par B se coupent en B′ après la lentille. Afin de déterminer cette intersection, il suffit d'en construire deux quelconques. Trois rayons sont particulièrement faciles à construire :

- le rayon passant par B et O, qui n'est pas dévié,
- le rayon passant par B et F, qui ressort parallèle à l'axe optique,
- le rayon passant par B parallèle à l'axe optique, qui ressort par F′.

Leur point d'intersection est l'image B′ de B. D'autre part, l'image de A est nécessairement un point de l'axe optique ; en effet le rayon passant par A et O (confondu avec l'axe optique) n'est pas dévié, et par voie de conséquence, A′ appartient aussi à l'axe optique. Comme la lentille est aplanétique, l'image A′ de A est telle que A′B′ soit perpendiculaire à l'axe optique ; autrement dit, A′ est le projeté de B′ sur l'axe optique.



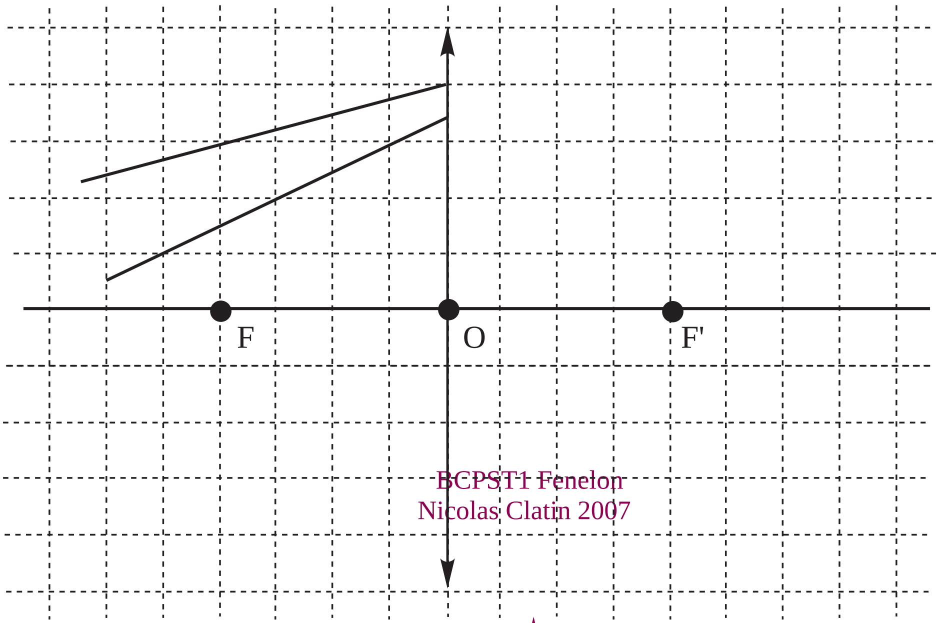



Dans ce cas particulier, l'objet est situé avant la lentille. Un manipulateur peut le toucher ou, s'il s'agit d'un objet lumineux, le visualiser sur un écran ; c'est un **objet réel**. De la même façon, l'image est située au-delà de la lentille. Un manipulateur peut la visualiser sur un écran qu'il placerait dans le plan A′B′ ; c'est une **image réelle**.

Si l'image était formé en avant de la lentille, il ne serait pas possible de la visualiser sur un écran. En effet, celui-ci intercepterait les rayons avant qu'ils n'atteignent la lentille, et on ne pourrait évidemment plus voir l'image à travers la lentille ; l'**image** serait **virtuelle**. De même, un objet situé après la lentille est un **objet virtuel**.

## 2.2 Construction de la marche d'un faisceau à travers une lentille convergente.

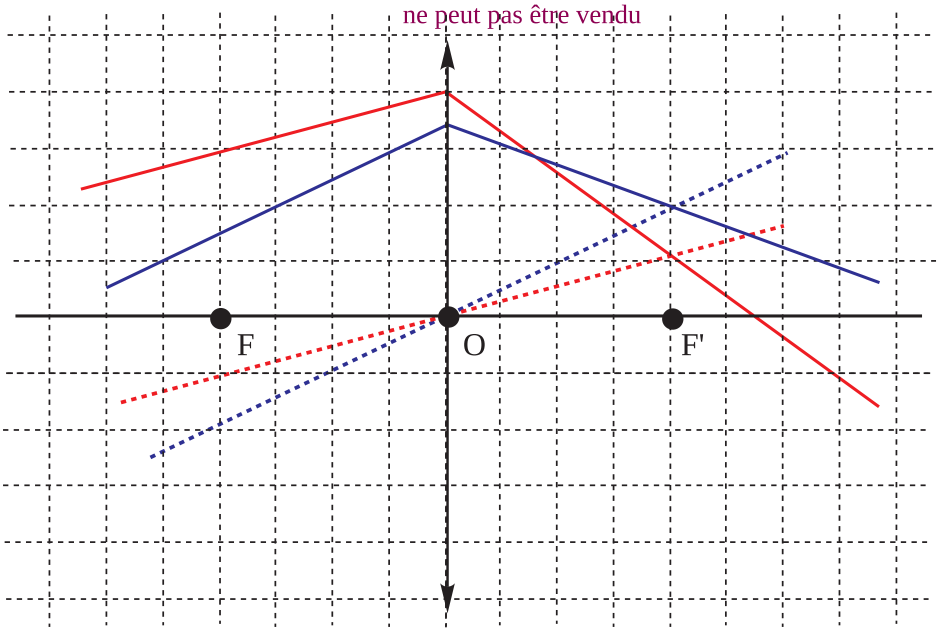
On considère maintenant un faisceau, limité par un ensemble de rayons (les deux rayons inférieur et supérieur sur un schéma en coupe), et on souhaite déterminer la marche du faisceau après passage par la lentille.



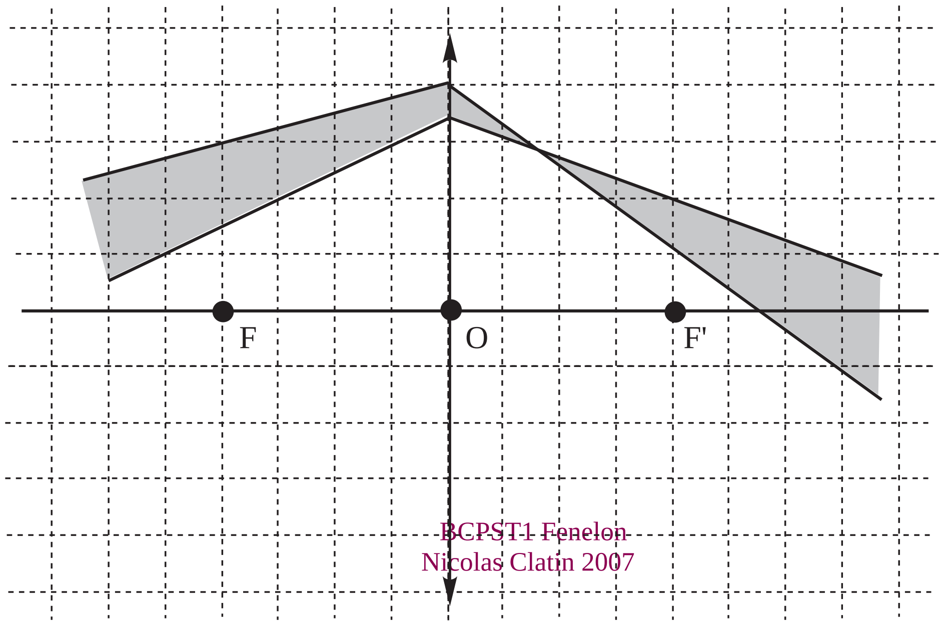



Pour cela, il suffit de construire la marche des rayons qui délimitent le faisceau. On est alors ramené au problème de la construction de la marche d'un rayon lumineux au passage d'une lentille. Si le rayon est quelconque (s'il ne passe par aucun des trois points particuliers O, F ou F′), le plus simple est de déterminer en quel point du plan focal image il converge après passage par la lentille. Ce point est donné par le rayon parallèle au rayon considéré et passant par O.





Le faisceau est compris entre ces deux rayons. Dans ce cas particulier on constate qu'il converge en un point à la sortie de la lentille. On dit que le faisceau a été *focalisé* en ce point.



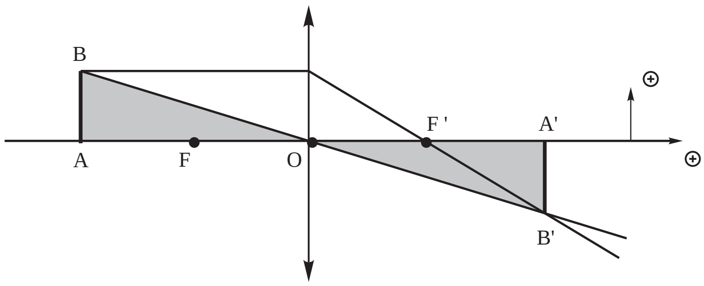



Focaliser un faisceau en un point est une manière de concentrer l'énergie lumineuse en ce point. C'est le principe de l'allumage d'un feu à l'aide d'une loupe. Avec un faisceau laser, l'énergie concentrée au point de focalisation peut être très grande, ce qui permet la découpe d'une plaque de métal, la fusion locale de matériaux à haute température de fusion, ou de l'ablation de matière à la surface d'un solide. Cette dernière technique est utilisée en chirurgie ophtalmique pour corriger les défauts de courbure de la rétine chez les personnes très myopes.

# 3 Formules de conjugaison.

## 3.1 Avec origine au centre optique : formule de Descartes.

Considérons un objet AB orthogonal à l'axe optique et placé avant le foyer objet d'une lentille convergente, et son image A′B′ par la lentille. Le point A est situé sur l'axe optique.




Les triangles (OAB) et (OA′B′) sont semblables ; on peut donc écrire :

$$\frac{\overline{\mathrm{A'B'}}}{\overline{\mathrm{OA'}}} = \frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{OA}}} \tag{4}$$



On appelle **grandissement transversal** par la lentille le rapport de la taille algébrique de l'image $\overline{\mathrm{A'B'}}$ à la taille algébrique de l'objet $\overline{\mathrm{AB}}$, celui-ci étant perpendiculaire à l'axe optique. D'après la relation précédente, on a :

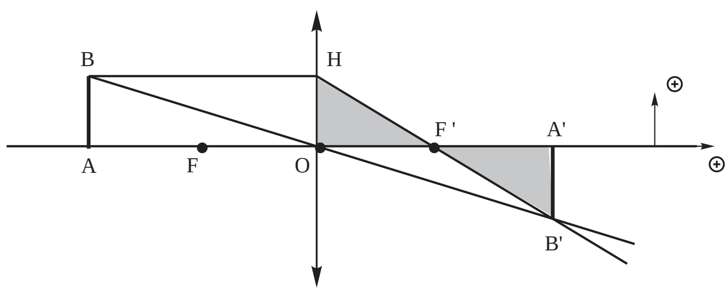
$$\boxed{\gamma = \frac{\overline{\mathrm{A'B'}}}{\overline{\mathrm{AB}}} = \frac{\overline{\mathrm{OA'}}}{\overline{\mathrm{OA}}}} \tag{5}$$

Le grandissement est une grandeur algébrique. L'image est plus grande que l'objet si $|\gamma| > 1$ et plus petite sinon. L'image est droite (dans le même sens que l'objet) si $\gamma > 0$ et inversée sinon. À noter que si $\gamma < 0$, non seulement l'image est inversée dans le sens vertical (le haut et le bas sont inversés par rapport à l'objet), mais aussi latéralement (la droite et la gauche sont inversées). En effet, le schéma ci-dessus construit l'image d'un objet perpendiculaire à l'axe optique, mais cet objet peut tout aussi bien être vertical qu'horizontal.



Soit H le projeté orthogonal de B sur le plan de la lentille ; on a évidemment $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{OH}}$. Les triangles (F′OH) et (F′A′B′) sont semblables. On a donc :

$$\frac{\overline{\mathrm{A'B'}}}{\overline{\mathrm{F'A'}}} = \frac{\overline{\mathrm{OH}}}{\overline{\mathrm{F'O}}} = \frac{\overline{\mathrm{AB}}}{-f'} \tag{6}$$




En utilisant la relation de Châsles, cette formule conduit à :

$$\frac{\overline{\mathrm{A'B'}}}{\overline{\mathrm{AB}}} = \frac{\overline{\mathrm{F'A'}}}{-f'} = \frac{\overline{\mathrm{F'O}} + \overline{\mathrm{OA'}}}{-f'} = \frac{-f' + \overline{\mathrm{OA'}}}{-f'} = 1 - \frac{\overline{\mathrm{OA'}}}{f'} \tag{7}$$

En remplaçant à l'aide de (5), on obtient :

$$\frac{\overline{\mathrm{OA'}}}{\overline{\mathrm{OA}}} = 1 - \frac{\overline{\mathrm{OA'}}}{f'} \tag{8}$$

La formule de conjugaison avec origine au centre optique, dite encore **formule de conjugaison de Descartes**, s'en déduit par division des deux membres par $\overline{\mathrm{OA'}}$ et réarrangement :

$$\boxed{\frac{1}{\overline{\mathrm{OA'}}} - \frac{1}{\overline{\mathrm{OA}}} = \frac{1}{f'}} \tag{9}$$

Application. Soit une tige de 2 cm, perpendiculaire à l'axe optique, dont une extrémité est sur l'axe optique à une distance de 30 cm du centre optique d'une lentille convergente de distance focale 20 cm. On cherche la position et la taille de l'image.

Il faut commencer par analyser les données du problème. Comme la lentille est convergente, sa distance focale est positive, soit : $f' = +20$ cm. L'objet étant réel, il est avant la lentille, soit $\overline{\mathrm{OA}} = -30$ cm. Enfin, la taille de l'objet est $\overline{\mathrm{AB}} = 2$ cm. La formule de conjugaison de Descartes montre que l'image est située 60 cm après la lentille :



$$\frac{1}{\overline{\mathrm{OA'}}} = \frac{1}{\overline{\mathrm{OA}}} + \frac{1}{f'} = \frac{1}{-30} + \frac{1}{20} = \frac{1}{60} \Rightarrow \overline{\mathrm{OA'}} = 60 \text{ cm} \tag{10}$$

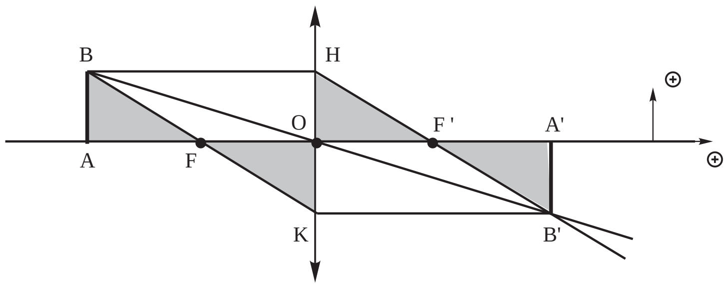
À l'aide du grandissement transversal, on détermine que l'image est deux fois plus grande que l'objet et inversée :

$$\gamma = \frac{\overline{\mathrm{OA'}}}{\overline{\mathrm{OA}}} = \frac{60}{-30} = -2 \Rightarrow \overline{\mathrm{A'B'}} = \gamma\,\overline{\mathrm{AB}} = -4 \text{ cm} \tag{11}$$

## 3.2 Avec origine aux foyers : formule de Newton.



Reprenons le même problème que précédemment ; on note H le projeté de B, et K le projeté de B′ sur le plan de la lentille.




Les triangles (FAB) et (FOK) sont semblables, et $\overline{\mathrm{OK}} = \overline{\mathrm{A'B'}}$, donc :

$$\frac{\overline{\mathrm{FA}}}{\overline{\mathrm{FO}}} = \frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{OK}}} \Rightarrow \frac{\overline{\mathrm{FA}}}{f'} = \frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{A'B'}}} \tag{12}$$

De même, comme $\overline{\mathrm{OH}} = \overline{\mathrm{AB}}$, dans les triangles semblables (F′A′B′) et (F′OH), on a :

$$\frac{\overline{\mathrm{F'A'}}}{\overline{\mathrm{F'O}}} = \frac{\overline{\mathrm{A'B'}}}{\overline{\mathrm{OH}}} \Rightarrow \frac{\overline{\mathrm{F'A'}}}{-f'} = \frac{\overline{\mathrm{A'B'}}}{\overline{\mathrm{AB}}} \tag{13}$$

De ces deux expressions, on déduit deux formules du grandissement transversal :

$$\boxed{\gamma = \frac{\overline{\mathrm{A'B'}}}{\overline{\mathrm{AB}}} = \frac{f'}{\overline{\mathrm{FA}}} = -\frac{\overline{\mathrm{F'A'}}}{f'}} \tag{14}$$

D'autre part, en multipliant membre à membre (12) et (13), on a :

$$\frac{\overline{\mathrm{FA}} \cdot \overline{\mathrm{F'A'}}}{-f'^2} = 1 \tag{15}$$

Ceci est la formule de conjugaison avec origine aux foyers, dite **formule de conjugaison de Newton** :

$$\boxed{\overline{\mathrm{FA}} \cdot \overline{\mathrm{F'A'}} = -f'^2} \tag{16}$$

Application. Reprenons l'exemple précédent de la tige de 2 cm, perpendiculaire à l'axe optique à une distance de 30 cm du centre optique d'une lentille convergente de distance focale 20 cm. On cherche la position et la taille de l'image.

L'objet est réel, donc avant la lentille. On en déduit la distance entre l'objet et le foyer objet de la lentille :



$$\overline{\mathrm{FA}} = \overline{\mathrm{FO}} + \overline{\mathrm{OA}} = f' + \overline{\mathrm{OA}} = 20 - 30 = -10 \text{ cm} \tag{17}$$

La position de l'image par rapport au foyer image est donnée par la formule de Newton :

$$\overline{\mathrm{F'A'}} = \frac{-f'^2}{\overline{\mathrm{FA}}} = \frac{-20^2}{-10} = 40 \text{ cm} \tag{18}$$

Ceci correspond bien au même résultat que celui obtenu par la formule de Descartes. En effet :

$$\overline{\mathrm{OA'}} = \overline{\mathrm{OF'}} + \overline{\mathrm{F'A'}} = f' + \overline{\mathrm{F'A'}} = 60 \text{ cm} \tag{19}$$

Le grandissement est :



$$\frac{f'}{\overline{\mathrm{FA}}} = \frac{20}{-10} = -2 \tag{20}$$