PRINCIPE DE FERMAT

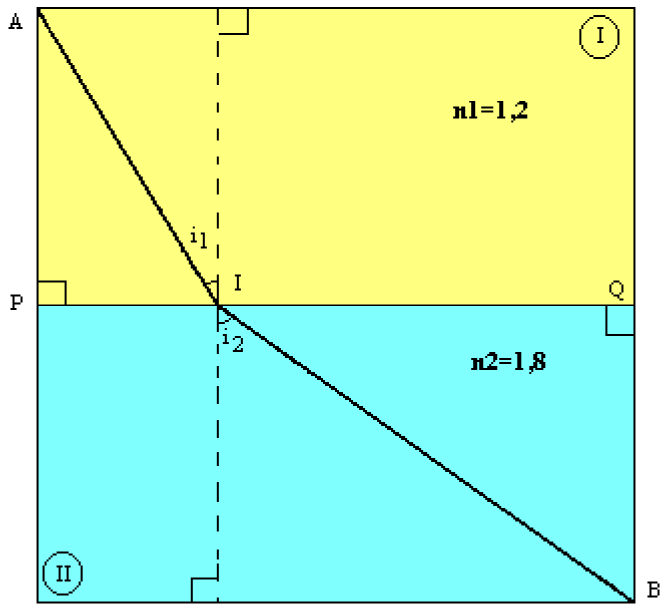
Cet exercice se veut une illustration du principe de Fermat et peut être traité par un élève de seconde dans sa première partie
La conclusion semble conférer à la lumière des propriétés déconcertantes.

Ière Illustration

Considérons à titre d'exemple le chemin que nous aurions à parcourir à pied pour aller d'un point A à un point B en traversant deux espaces contigus différemment difficiles à franchir.voir schéma suivant dans lequel la partie jaune pourrait représenter l'espace le plus difficile à franchir)
Il est clair que pour une durée aussi réduite que possible de notre traversée , il ne faudra pas trop s'éterniser sur le parcours difficile ; mais , couper au plus court selon la normale à PQ nous obligera au trajet le plus long sur l'espace de moindre difficulté . Il n'est pas dit que cette façon de procéder accordera la durée la plus faible pour la traversée de l'ensemble des deux espaces.
Si nous connaissons dès le départ la configuration géométrique des espaces et si de plus nous pouvons quantifier les difficultés de franchissement alors nous pourrons décider de la façon la plus avantageuse des directions à prendre.

Qu'en est-il de la lumière?Voir la conclusion.

Dans le schéma suivant réalisé à l'échelle , on considère la marche hypothétique d'un rayon de lumière issu de A et qui rejoint le point B sans obéir à la loi de Descartes.
Les trajets AI et IB sont dans les milieux respectifs d'indice n_1 et n_2 pour lesquels la vitesse de propagation de la lumière sera notée v_1 et v_2
Données : $n_1 = 1,2$ $n_2 = 1,8$ AP= BQ = 1 m PQ= 2 m
c = vitesse de la lumière dans le vide $=3,0.10^8$ m.s^{-1}



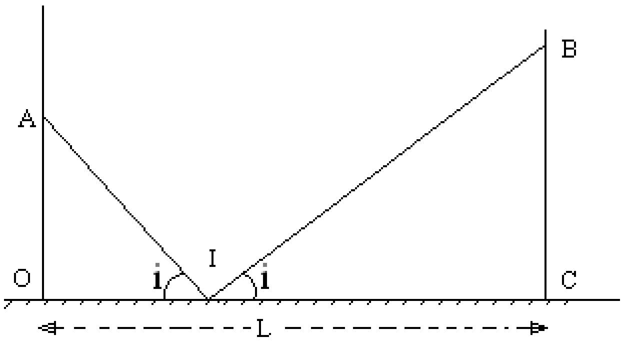
On notera x la valeur réelle de PI dans toute la suite du problème
1- Mesurer sur le schéma les valeurs de i_1 et i_2
2- En quoi sur le schéma la propagation de la lumière ne suit-elle pas la loi de Descartes pour la réfraction , qualitativement et quantitativement ?
3-(0,5 pt) Rappeler les relations liant n_1 , v_1 et c d'une part et n_2 , v_2 et c d'autre part.
4-a-(1,5 pt) Calculer AI et BI en fonction de x et des données de l'énoncé à l'aide du théorème de pythagore.
b-(1,5 pt) En déduire la durée notée t_1 du parcours de la lumière entre A et I en fonction de x et v_1

ainsi que celle notée t_2 du parcours entre I et B en fonction de x et v_2 .
5- (0,75 pt) t étant la durée totale du parcours de la lumière entre A et B , donner l'expression du produit c.t en fonction de n_1 , n_2 et x.
6-La courbe donnant c.t en fonction de x a l'allure suivante.
a-(0,5 pt) En déduire la valeur de x pour laquelle la durée de parcours de la lumière entre A et B est minimale.
b-(1,5 pt)Calculer pour cette valeur de x $n_1 \sin i_1$ et $n_2 \sin i_2$.
(0,75 pt) Que peut-on en conclure ?

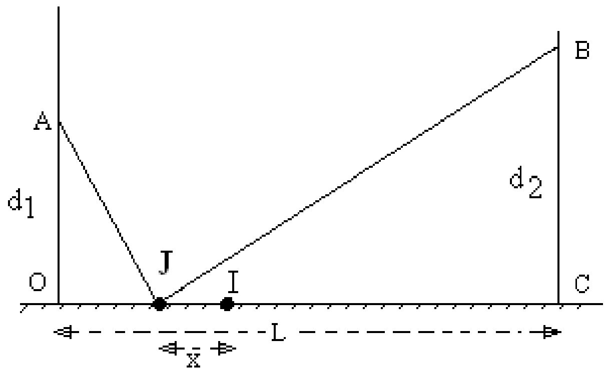
II^{ème} Illustration : cas de la réflexion

La dernière réponse nous invite à considérer un autre cas de figure , la reflexion
Un développement mathématique un peu délicat réserve cette partie à des élèves ayant au moins le bagage mathématique de 1ère S. On pourra sans doute trouver des développements plus légers.

Préambule: « Les miroirs devraient refléchir avant de renvoyer la lumière »-J.Cocteau
7- Dans le schéma explicite suivant déterminons la position du point I sur le miroir OC tel qu'un rayon issu de A se reflechisse et passe ensuite par B



a- Montrer que $OI = d_1 L/(d_1 + d_2)$ avec d_1 = OA et d_2 = BC
b-Considérons maintenant le schéma suivant volontairement faux dans lequel le rayon viendrait se réfléchir en J et appelons x la distance I J



$AJ= (d_1^2 + (x_1 - x)^2)^{½}$ $BJ= (d_2^2 + (x_2 + x)^2)^{½}$ avec $OI= x_1$ et $CI= x_2$
Pour montrer que le trajet réel correspond comme dans la première partie à un minimum de durée il faudrait que AJ + BJ soit un minimum (un extrémum plus précisément) quand x=0.
Mathématiquement cela se traduira par la valeur nulle pour la dérivée de cette somme par rapport à x.
L'équation résultante étant délicate on se bornera à établir que pour la valeur de x égale à 0 comme nous le supputons , cette dérivée est nulle.Faire le développement.

III-Conclusion

Le principe de Fermat postule que « le trajet suivi par la lumière pour aller d'un point à un autre dans des milieux quelconques est de durée stationnaire » i.e , que la durée est maximale ou minimale.
C'est ce que nous venons d'illustrer.
Mais comme nous l'avons montrer dans le cas du marcheur ce chemin ne semble pouvoir être minimisé que si nous connaissons initialement les difficultés à venir.
Dans le cas de la lumière à laquelle il est impensable d'accorder une connaissance préalable du milieu ce principe signifie que lorsque nous observons le cheminement de la lumière qui rejoint deux points , alors nous pouvons être sûr que ce cheminement est stationnaire ; sans pour autant imaginer quelques essais et erreurs de la lumière pour décider du chemin le plus avantageux.
Ce principe rejoint du reste le principe de Maupertuis dans le domaine de la mécanique.

Réponses

1- utiliser le rapporteur
2-Quantitativement , il suffit de comparer $n_1 \sin i_1$ et $n_2 \sin i_2$
Qualitativement on doit savoir que le **R**ayon **R**éf**R**acté se **R**app**R**oche de la no**R**male dans le milieux t**R**ès (le plus)**R**éf**R**ingent ce qui n'est pas le cas ici (bien marquer les « R » pour mémoriser cette propriété)
3 - $n_1=c/v_1$ $n_2=c/v_2$
4-a $AI=(x^2 +1)^{1/2}$ $BI=((2-x)^2+1)^{1/2}$
4-b $t_1 = AI/v_1 =(x^2 +1)^{1/2} / v_1$ $t_2 = BI/v_2 =((2-x)^2+1)^{1/2} /v_2$
5- $ct = c(t_1 + t_2) = n_1 (x^2 +1)^{1/2} + n_2 ((2-x)^2+1)^{1/2}$

6a- x = 1,35
6b – $\sin i_1 = x/AI$ ....
$\sin i_2 = (2-x)/BI$ en remplaçant x par 1,35 on observe alors que $n_1\sin i_1 = n_2\sin i_2$
On peut en conclure que la lumière effectue le trajet le plus court..
Est-ce une coïncidence?
7a- $OI= d_1 / \tan(i)$ $CI = d_2 / \tan(i)$ $L= OI+CI = (d_1 + d_2) / \tan(i)$ $\tan(i)= (d_1 +d_2) / L$
$OI= d_1L / (d_1 + d_2) = x_1$ $CI= d_2 L / (d_1 + d_2) = x_2$
7b- $d(AI+BJ)/dx = dAJ/dx +d(BJ)/dx$
Or $AJ= (d_1^2 + ((x_1-x)^2)^{1/2}$ et $BJ= (d_2^2+(x_2+x)^2)^{1/2}$
Par suite: $d(AI+BJ)/dx = -2(x_1-x)/ (2(d_1^2 +(x_1-x)^2)^{1/2} + 2(x_2 + x)/ (2(d_2^2 +(x_2 +x)^2)^{1/2}$
Il est facile de vérifier que pour x=0 cette dérivée s'annule
Le chemin le plus court correspond bien comme dans le cas de la réfraction aux lois de Descartes.