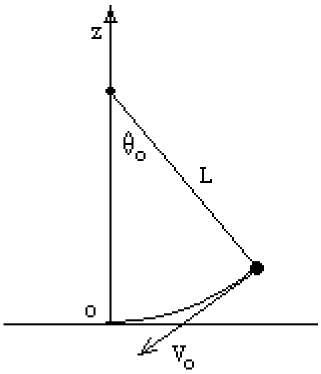
Pendule simple et méthode d'Euler

Un pendule simple de longueur L dans le champs de pesanteur terrestre d'intensité $g=9,81\ m.s^{-2}$ est écarté de sa position d'équilibre d'un angle θ_o puis lancé vers le bas avec une vitesse V_o selon le schéma suivant. On considèrera que les frottements sont négligeables.



1-a- Exprimer en fonction de m ,V_o , g , L et θ_o l'énergie mécanique E du pendule à l'instant initial du lancement.

b- Faire l'application numérique avec les données suivantes:
$V_o = 1,50\ m.s^{-1}$, $\theta_o = 40,0°$, L= 0.500m et m=0.100 kg

2- Exprimer cette même énergie en fonction de m , g , L , θ et θ' (écrire téta point) pour une amplitude quelconque sachant que la vitesse tangentielle est donnée par v= Lθ'.

3- a- Exprimer dE/dt en fonction de m , g , L , θ , θ' et θ''

b- En déduire l'équation différentielle régissant le mouvement du pendule.

c- Dans quelles conditions la solution est-elle du type $\theta = A\cos(\omega_o t + \varphi)$?

d-Préciser dans ce cas le sens et les valeurs numériques de A , ω_o et φ

4-Afin de visualiser le bien fondé des calculs précédent on se propose de résoudre par la méthode d'Euler l'équation différentielle 3b

Faire un tableau mettant en évidence les variations de téta en fonction du temps dans le cas général et dans le cas de très faibles amplitudes .

Réponses

1-a- En prenant pour origine des énergies potentielles de pesanteur le point le plus bas:

$E = ½\ m\ V_o^2 + mgL(1-\cos\theta_o)$

b- AN $E = 2,27.10^{-1}$ J

2- Exprimer cette même énergie en fonction de m , g , L , θ et θ' (écrire téta point) pour une amplitude quelconque sachant que la vitesse tangentielle est donnée par v= Lθ'.

$E= ½\ m\ L^2\ \theta'^2 + mgL(1-\cos\theta)$

3- a- $dE/dt = ½\ mL^2 \times 2\theta'\theta'' + mgL\theta'\sin\theta$

b- Le système étant conservatif (pas de frottements) dE/dt = 0

L'équation différentielle est donc:

$L\ \theta'\theta'' + g\theta'\sin\theta = 0$ ou encore $\theta' (L\ \theta'' + g\sin\theta) = 0$ qui se réduit à $L\ \theta'' + g\sin\theta = 0$

c- Si θ est faible alors $\sin\theta \sim \theta$ et l'équation différentielle devient

$L\ \theta'' + g\theta = 0$ ou $\theta'' + (g/L)\theta = 0$

En posant $\omega_o^2 = g/L$ la solution est du type $\theta = A\cos(\omega_o t + \varphi)$

$\omega_o = 4,43\ rad.s^{-1}$ = pulsation

A est l'amplitude maximale obtenue quand l'énergie cinétique est nulle soit quand θ' = 0

$½\ m\ L^2\ \theta'^2 + mgL(1-\cos\theta) = ½\ mV_o^2 + mgL(1-\cos\theta_o) = E$

$mgL(1-\cos\theta_{Max}) = E$

$(1-\cos\theta_{Max}) = E/mgL$

$\cos\theta_{Max} = 1- E/mgL$

$\theta_{Max} = \cos^{-1}(1- E/mgL)$

AN: $\theta_{Max} = 57,5° = 1,004$ rad

φ est la phase à l'origine

en t = 0 $\theta = 40° = 0,698$ rad

40 =57,5 cosφ

cette équation a deux solutions $\varphi = +/-\cos^{-1}(40/57,5) = +/- 45,96°$ soit +/- 0,802 rad

C'est la vitesse initiale qui va nous permettre de trancher

avec $\theta = A\cos(\omega_o t + \varphi)$ $\theta' = - A\,\omega_o \sin(\omega_o t + \varphi)$

en t=0 $\theta' = \theta'_0 = - A\,\omega_o \sin\varphi$ et θ'_o est négatif par suite $\sin\varphi > 0$ et ainsi φ a pour valeur 0,802 rad

4- Voir le tableau Xls " penduleEuler "

Prolonger les lignes pour faire apparaître 3 à 4 périodes.

Remarque si la vitesse initiale est conséquente, malgré une faible amplitude initiale, l'amplitude maximale risque d'être importante.

Jouer sur les différents paramètres pour mettre en évidence la réponse à la question 3c

Pour la construction du tableau on commence par créer la rampe de pas 0,01 (cellule A5)

Puis l'on remplit les conditions initiales en B4 et C4 ; la cellule D4 est rempli à l'aide de l'équation différentielle.

Bien retenir que c'est l'accélération qui est le " moteur " de la méthode d'Euler.

L'accélération initiale induit la vitesse acquise par la formule $a = (V_f - V_i)/\Delta t$; alors $V_f = V_i + a\Delta t$

La vitesse induit enfin l'élongation par la formule: $V = (\theta_f - \theta_i)/\Delta t$; alors $\theta_f = \theta_i + V\Delta t$ (V étant la vitesse acquise et non pas la précédente)

Il ne reste plus qu'à écrire la nouvelle accélération sur la même ligne à l'aide de l'équation différentielle.