A quelle vitesse je tombe des nues ?

Cet exercice pose le problème classique de l'existence d'une vitesse limite lors de la chute d'un corps dans l'air.
Quelle sera la valeur de cette limite?
Dépend-elle du poids? Si oui, de deux corps de poids différents quel est celui dont la vitesse limite est la plus grande?
Nous savons que le mouvement de chute libre ne dépend pas de la masse car la deuxième loi de Newton conduit à $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}_G$ soit $m\mathbf{g} = m\mathbf{a}_G$ (vecteurs en caractères gras) ou enfin $\mathbf{g} = \mathbf{a}_G$
Mais dans le cas de notre étude il ne s'agit pas de chute libre car il faudra faire intervenir une autre force que le poids, la résistance de l'air.
On pourrait penser que l'objet le plus " lourd " tombe plus vite car son poids est plus grand et par suite la force motrice. On avancera sans doute que s'il est plus grand, alors la masse est plus importante ; or la masse d'un corps traduit sa répugnance à être mis en mouvement.
Avant donc de répondre hativement penchons nous sur l'exercice suivant

Deux corps de masses différentes m_1 et $m_2 > m_1$, de même forme (goutte d'eau , sphère , cylindre….) et de même densité sont lâchés d'une même hauteur sans vitesse initiale dans l'air.(il pourrait s'agir de deux personnes pratiquant la chute " libre " dans la même position) .

1 - Justifier l'existence d'une vitesse limite si l'on sait que la résistance de l'air est proportionnelle au carré de la vitesse.

2 - Pour quelles raisons la vitesse limite de m_1 pourrait-elle être inférieure à celle de m_2 ?

3 - Pour quelles raisons la vitesse limite de m_1 pourrait-elle être supérieure à celle de m_2 ?

4 - Les questions précédentes montrent la nécessité de passer par le calcul : la valeur de la résistance de l'air est donnée par $F = ½\, a\, C_x\, S\, v^2$ expression dans laquelle a est la masse volumique de l'air , v la vitesse, S la surface du maître couple (aire du volume déplacé projeté sur un plan perpendiculaire au déplacement –voir document) et C_x un coefficient dépendant de la forme de l'objet (goutte , sphère , cylindre…)

Soit v_L la vitesse limite pour une bille de masse m ,de rayon r et de masse volumique ρ.
Exprimer $(v_L)^6$ en fonction de g , m , C_x , a et ρ <u>uniquement</u>
Conclusion ?
Rappel : volume de la sphère = $V = 4\pi\, r^3/3$

Test de mesure de maître couple

Réponses

1-Le corps est soumis à l'action de deux forces : son poids et la résistance de l'air **F** proportionnelle au carré de la vitesse.
F croit avec la vitesse jusqu'au point où elle prend une valeur égale au poids.
La vitesse limite est obtenue par le principe de l'inertie quand la somme des forces appliquées au corps est nulle. $M\mathbf{g} + \mathbf{F} = \mathbf{0}$

2- Si nous écrivons $F=kv^2$ alors $mg = kv_{lim}^2$ et il semble que la vitesse limite soit donc une fonction croissante de la masse et qu'ainsi m_2 est une vitesse limite plus grande.

3- Mais si m_2 est supérieur à m_1 , m_2 a un volume plus grand et présente sans doute une plus grande résistance de frottement dans l'air

4- $mg = \frac{1}{2} a C_x S V_{Lim}{}^2$

or $m=\rho V$ si V est le volume , soit $m=\rho*4\pi R^3 /3$ et de plus $S = \pi R^2$

$$R^3 = 3m/(\rho*4\pi)$$

$$V_{Lim}{}^2 = mg/(\tfrac{1}{2} a C_x S)$$

$$V_{Lim}{}^2 = 2mg/(a C_x \pi R^2)$$

$$V_{Lim}{}^6 = 8m^3g^3 /(a^3C_x{}^3 \pi^3 R^6)$$

$$V_{Lim}{}^6 = 8m^3g^3 /(a^3C_x{}^3 \pi^3 (3m/(\rho*4\pi))^2)$$

$V_{Lim}{}^6 = 8m^3g^3.16\pi^2\rho^2 \quad /(9a^3C_x{}^3 \pi^3 m^2) = \lambda$ m avec λ ne dépendant pas de m

La vitesse limite est donc une fonction croissante de la masse pour une même forme, et une même masse volumique.

Pouvant donc considérer que tous les hommes ont la même masse volumique, c'est le plus lourd qui va le plus vite en tombant des nues , soit d'une distance telle que la vitesse limite est atteinte.