

2. Probabilités et statistique

On approfondit le travail en probabilités et statistique mené les années précédentes.

Afin de traiter les champs de problèmes associés aux données continues, on introduit les lois de probabilité à densité.

La loi normale permet d'initier les élèves à la statistique inférentielle par la détermination d'un intervalle de confiance pour une proportion à un niveau de confiance de 95 %.

Cette partie se prête particulièrement à l'étude de problèmes issus d'autres disciplines, notamment des sciences économiques et sociales.

Le recours aux représentations graphiques et aux simulations est indispensable.

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
<p>Conditionnement</p> <p>Conditionnement par un événement de probabilité non nulle. Notation $P_A(B)$.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Construire un arbre pondéré en lien avec une situation donnée. • Exploiter la lecture d'un arbre pondéré pour déterminer des probabilités. • Calculer la probabilité d'un événement connaissant ses probabilités conditionnelles relatives à une partition de l'univers. 	<p>On représente une situation à l'aide d'un arbre pondéré ou d'un tableau. On énonce et on justifie les règles de construction et d'utilisation des arbres pondérés.</p> <p>Un arbre pondéré correctement construit constitue une preuve.</p> <p>Le vocabulaire lié à la formule des probabilités totales n'est pas attendu du programme, mais la mise en œuvre de cette formule doit être maîtrisée.</p> <p>Cette partie du programme se prête particulièrement à l'étude de situations concrètes.</p>
<p>Notion de loi à densité à partir d'exemples</p> <p>Loi à densité sur un intervalle.</p>		<p>Les exemples étudiés s'appuient sur une expérience aléatoire et un univers associé Ω, muni d'une probabilité. On définit alors une variable aléatoire X, fonction de Ω dans \mathbf{R}, qui associe à chaque issue un nombre réel d'un intervalle I de \mathbf{R}. On admet que X satisfait aux conditions qui permettent de définir la probabilité de l'événement $\{X \in J\}$ comme aire du domaine : $\{M(x, y); x \in J \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}$ où f désigne la fonction de densité de la loi et J un intervalle inclus dans I.</p> <p>Toute théorie générale des lois à densité et des intégrales sur un intervalle non borné est exclue.</p>
<p>Loi uniforme sur $[a, b]$.</p> <p>Espérance d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Connaître la fonction de densité de la loi uniforme sur $[a, b]$. 	<p>L'instruction « nombre aléatoire » d'un logiciel ou d'une calculatrice permet d'introduire la loi uniforme sur $[0, 1]$. La notion d'espérance d'une variable aléatoire à densité sur $[a, b]$ est introduite à cette occasion par $\int_a^b t f(t) dt$. On note que cette définition constitue un prolongement dans le cadre continu de l'espérance d'une variable aléatoire discrète.</p>

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
<p>Loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.</p> <p>Loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ d'espérance μ et d'écart-type σ.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Connaître la fonction de densité de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ et sa représentation graphique. • Connaître une valeur approchée de la probabilité de l'événement $\{X \in [-1,96; 1,96]\}$ lorsque X suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. • Utiliser une calculatrice ou un tableur pour obtenir une probabilité dans le cadre d'une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. • Connaître une valeur approchée de la probabilité des événements suivants : $\{X \in [\mu - \sigma, \mu + \sigma]\}$, $\{X \in [\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]\}$ et $\{X \in [\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]\}$, lorsque X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. 	<p>Pour introduire la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, on s'appuie sur l'observation des représentations graphiques de la loi de la variable aléatoire $Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ où X_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ et cela pour de grandes valeurs de n et une valeur de p fixée entre 0 et 1.</p> <p>À ce propos, on peut faire référence aux travaux de Moivre et de Laplace en les situant dans une perspective historique.</p> <p>Une variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ si $\frac{X - \mu}{\sigma}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.</p> <p>On se limite à une approche intuitive de la notion d'espérance.</p> <p>On exploite les outils logiciels pour faire percevoir l'information apportée par la valeur de l'écart-type.</p> <p>La connaissance d'une expression algébrique de la fonction de densité de cette loi n'est pas un attendu du programme.</p> <p>On illustre ces notions par des exemples issus des sciences économiques ou des sciences humaines et sociales.</p>
<p>Intervalle de fluctuation</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Connaître, pour n assez grand, l'intervalle de fluctuation asymptotique (*) au seuil de 95 % : $\left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$ où p désigne la proportion dans la population. 	<p>La variable aléatoire F_n qui, à tout échantillon de taille n, associe la fréquence, prend ses valeurs dans l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % avec une probabilité qui s'approche de 0,95 quand n devient grand.</p> <p>On admet le résultat ci-contre, qui est conforté grâce à la simulation.</p> <p>Avec les exigences usuelles de précision, on pratique cette approximation dès que $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$.</p> <p>En majorant $1,96\sqrt{p(1-p)}$, on retrouve l'intervalle de fluctuation présenté en classe de seconde.</p> <p>La problématique de prise de décision, déjà rencontrée, est travaillée à nouveau.</p>

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
<p>Estimation</p> <p>Intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95(*).</p> <p>Niveau de confiance.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Estimer une proportion inconnue à partir d'un échantillon. • Déterminer une taille d'échantillon suffisante pour obtenir, avec une précision donnée, une estimation d'une proportion au niveau de confiance 0,95. 	<p>Les attendus de ce paragraphe sont modestes et sont à exploiter en lien avec les autres disciplines.</p> <p>On énonce que p est élément de l'intervalle $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}, f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ avec un niveau de confiance de plus de 95 %, où f désigne la fréquence observée sur un échantillon de taille n.</p> <p>Avec les exigences usuelles de précision, on utilise cet intervalle dès que $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$.</p> <p>La simulation de sondages sur tableur permet de sensibiliser aux fourchettes de sondage.</p> <p>Il est important de noter que, dans d'autres champs, on utilise l'intervalle $\left[f - 1,96 \frac{\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{n}}, f + 1,96 \frac{\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{n}} \right]$ qu'il n'est pas possible de justifier dans ce programme.</p>

(*)Avec les notations précédentes :

Un intervalle de fluctuation asymptotique de la variable aléatoire F_n au seuil 0,95 est un intervalle déterminé à partir de p et de n et qui contient F_n avec une probabilité d'autant plus proche de 0,95 que n est grand.

Pour une valeur de p fixée, l'intervalle aléatoire $\left[F_n - \frac{1}{\sqrt{n}}, F_n + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ contient, pour n assez grand, la proportion p à estimer avec une probabilité au moins égale à 0,95.

Un intervalle de confiance pour une proportion p au niveau de confiance 0,95 est la réalisation, à partir d'un échantillon, d'un intervalle aléatoire contenant la proportion p avec une probabilité supérieure ou égale à 0,95, intervalle aléatoire déterminé à partir de la variable aléatoire F_n qui, à tout échantillon de taille n , associe la fréquence.

Les intervalles de confiance considérés ici sont centrés en la fréquence observée f .