Chapitre 13 : Fractions rationnelles

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ est un sous corps de $\mathbb{C}$.

I Généralités

A) Définition

On note $\mathbb{K}(X)$ le corps des fractions de l'anneau intègre $(\mathbb{K}[X],+,\times)$. Les éléments de $\mathbb{K}(X)$ sont appelés fractions rationnelles formelles à coefficients dans $\mathbb{K}$.

B) Premières conséquences

(1) $\mathbb{K}(X)$ est muni de deux lois + et ×, contient $\mathbb{K}[X]$, les lois + et × sur $\mathbb{K}(X)$ prolongent celles de $\mathbb{K}[X]$.
$(\mathbb{K}(X),+,\times)$ est un corps commutatif, les neutres pour + et × sont :
$\begin{cases} 0_{\mathbb{K}(X)} = 0_{\mathbb{K}[X]} (= 0_{\mathbb{K}}), \text{ noté } 0 \\ 1_{\mathbb{K}(X)} = 1_{\mathbb{K}[X]} (= 1_{\mathbb{K}}), \text{ noté } 1 \end{cases}$

(2) Tout F de $\mathbb{K}(X)$ s'écrit sous la forme $P\times Q^{-1}$, où $P\in\mathbb{K}[X]$, et $Q\in\mathbb{K}[X]\setminus\{0\}$ (Q^{-1} désigne l'inverse dans le corps $\mathbb{K}(X)$ de l'élément Q non nul de ce corps).
$P\times Q^{-1}$ est noté $\dfrac{P}{Q}$ (c'est aussi $Q^{-1}\times P$ car le corps est commutatif)
Il en résulte diverses « règles de calcul » :
Pour tous $P,Q,R,A,D\in\mathbb{K}[X]$:

- $\dfrac{P}{1} = P$ (car $1^{-1}=1$)
- Si $P,Q\neq 0$, alors $\left(\dfrac{P}{Q}\right)^{-1} = \dfrac{Q}{P}$ (en effet : $\left(\dfrac{P}{Q}\right)^{-1} = (PQ^{-1})^{-1} = QP^{-1} = \dfrac{Q}{P}$)
- Si $Q_1,Q_2\neq 0$, alors $\dfrac{P_1}{Q_1}\times\dfrac{P_2}{Q_2} = P_1Q_1^{-1}P_2Q_2^{-1} = (P_1P_2)(Q_2Q_1)^{-1} = \dfrac{P_1P_2}{Q_1Q_2}$
- Si $Q,D\neq 0$, alors $\dfrac{DP}{DQ} = \dfrac{P}{Q}$ ($(DP)(DQ)^{-1} = DPQ^{-1}D^{-1} = D^{-1}DPQ^{-1} = \dfrac{P}{Q}$)
- Si $Q_1,Q_2\neq 0$, $\dfrac{P_1}{Q_1} = \dfrac{P_2}{Q_2} \Leftrightarrow P_1Q_2 = P_2Q_1$
- Si $Q\neq 0$, $\dfrac{P_1}{Q}+\dfrac{P_2}{Q} = \dfrac{P_1+P_2}{Q}$
- Si $Q_1,Q_2\neq 0$, $\dfrac{P_1}{Q_1}+\dfrac{P_2}{Q_2} = \dfrac{P_1Q_2}{Q_1Q_2}+\dfrac{P_2Q_1}{Q_1Q_2} = \dfrac{P_1Q_2+P_2Q_1}{Q_1Q_2}$

C) Produit externe

Pour $F \in \mathbb{K}(X)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on note $\lambda.F$ (ou λF) le produit $\lambda \times F$
Il en résulte que $(\mathbb{K}(X), +, \times, .)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.

II Diverses notions

A) Représentant – représentant irréductible

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$.

- Un représentant de F est, par définition, un couple $(P,Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ tel que $F = \dfrac{P}{Q}$
- Un représentant irréductible de F est, par définition, un couple $(A,B) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ tel que $F = \dfrac{A}{B}$ et $\operatorname{pgcd}(A,B) = 1$

Proposition :
(1) Toute fraction rationnelle F admet un représentant irréductible.
(2) Si (A,B) est un représentant irréductible de F, alors les autres représentants de F sont les $(DA, DB), D \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ (parmi lesquels les irréductibles sont les $(\lambda A, \lambda B), \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$)

Démonstration :
(1) Soit $F \in \mathbb{K}(X)$, (P,Q) un représentant de F. On pose $G = \operatorname{pgcd}(P,Q)$. Alors $P = GP_1$, $Q = GQ_1$, avec $\operatorname{pgcd}(P_1, Q_1) = 1$. Ainsi, $F = \dfrac{P}{Q} = \dfrac{GP_1}{GQ_1} = \dfrac{P_1}{Q_1}$.
(2) Supposons $F = \dfrac{A}{B}$, avec $\operatorname{pgcd}(A,B) = 1$, soit (P,Q) un autre représentant. Alors $\dfrac{P}{Q} = \dfrac{A}{B}$; $PB = QA$. Donc B divise QA, donc Q car $\operatorname{pgcd}(A,B) = 1$. Donc $Q = Q_1 B$. Donc $\dfrac{P}{Q_1 B} = \dfrac{A}{B}$; $\dfrac{P}{Q_1} = A$ (car $B \neq 0$). Donc $P = Q_1 A$. Donc $(P,Q) = (Q_1 A, Q_1 B)$. Inversement, les $(DA, DB), D \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ sont des représentants de F

B) Degré

Soit $F = \dfrac{P}{Q}$. La valeur de $\deg P - \deg Q$ est indépendante du choix du représentant (P,Q) de F (immédiat), on l'appelle le degré de F. Alors $\deg F \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$

Exemples :

$F = \dfrac{2X+1}{3X+2}$ est de degré 0.

$F = \dfrac{2X+1}{5X^2+4}$ est de degré -1.

Proposition :

$\deg(F_1F_2) = \deg(F_1) + \deg(F_2)$

$\deg(\lambda F) = \deg(F)$ si $\lambda \neq 0$

$\deg(F_1 + F_2) \leq \max(\deg(F_1), \deg(F_2))$

(Démonstration immédiate en raisonnant sur les degrés des représentants)

C) Zéros, pôles

Soit $F = \dfrac{A}{B}$, irréductible.

- Un zéro de F est, par définition, une racine de A. Son ordre de multiplicité est celui qu'il a en tant que racine de A.
- Un pôle de F est, par définition, une racine de B. Son ordre de multiplicité est celui qu'il a en tant que racine de B.

Exemple :

$F = \dfrac{X^3-1}{X^2-3X+2} = \dfrac{(X-j)(X-j^2)}{X-2}$. Donc j et j^2 sont des zéros d'ordre 1, et 2 est un pôle d'ordre 1.

Remarque : Si $F = \dfrac{P}{Q}$, non nécessairement irréductible :

- Si λ est racine de P d'ordre α, alors λ est racine de F d'ordre $\leq \alpha$ (voire 0)
- Si λ est racine de Q d'ordre α, alors λ est pôle de F d'ordre $\leq \alpha$ (voire 0)

D) Fonction rationnelle associée

Soit $F = \dfrac{A}{B}$, irréductible.

On note $D_F = \mathbb{K} \setminus \{\text{pôles de } F\}$: domaine de définition de la fonction rationnelle associée à F (Remarque : l'ensemble des pôles de F est fini car $B \neq 0$)

On note alors $\widetilde{F} : D_F \to \mathbb{K}$

$$x \mapsto \frac{A(x)}{B(x)}$$

Proposition :

- Si $F=\dfrac{P}{Q}$ non irréductible, et si x n'est pas une racine de Q, alors $x\in D_F$, et $\widetilde{F}(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$
- Si $F_1, F_2\in \mathbb{K}(X)$ et $\lambda\in\mathbb{K}$, alors :

- $D_{F_1}\cap D_{F_2}\subset D_{F_1+F_2}$ et $\forall x\in D_{F_1}\cap D_{F_2}, \widetilde{F_1+F_2}(x)=\widetilde{F}_1(x)+\widetilde{F}_2(x)$

- $D_{F_1}\cap D_{F_2}\subset D_{F_1F_2}$ et $\forall x\in D_{F_1}\cap D_{F_2}, \widetilde{F_1\times F_2}(x)=\widetilde{F}_1(x)\times\widetilde{F}_2(x)$

- $D_{F_1}\subset D_{\lambda F_1}$ et $\forall x\in D_{F_1}, \widetilde{\lambda F_1}(x)=\lambda\widetilde{F}_1(x)$

Proposition :

Soient $F_1, F_2\in\mathbb{K}(X)$. S'il existe un ensemble infini E inclus dans $D_{F_1}\cap D_{F_2}$ tel que $\forall x\in E, \widetilde{F}_1(x)=\widetilde{F}_2(x)$, alors $F_1=F_2$

Démonstration :

$F_1=\dfrac{A_1}{B_1}, F_2=\dfrac{A_2}{B_2}$ irréductibles.

Donc $\forall x\in E, A_1(x)B_2(x)=A_2(x)B_1(x)$. Donc A_1B_2 et A_2B_1 coïncident sur une infinité de valeurs. Donc $A_1B_2=A_2B_1$. Donc $F_1=F_2$.

Conséquence de ces propriétés : de même que pour les fonctions polynomiales, on peut enlever les ~ sur les fonctions rationnelles.

E) Dérivation formelle

Soit $F=\dfrac{P}{Q}$. La valeur de $\dfrac{P'Q-Q'P}{Q^2}$ ne dépend que de F (immédiat). On l'appelle F'.

Toutes les règles de calcul valables pour les dérivées formelles de polynômes sont aussi valables ici.

F) Substitution

Exemple :

$F=\dfrac{X^3-2X+4}{X^2+X+1}$. Alors $F(-X)=\dfrac{-X^3+2X+4}{X^2-X+1}$, $F(X^2)=\dfrac{X^6-2X^2+4}{X^4+X^2+1}$.

Attention, étant donnée $F\in\mathbb{K}(X)$, on ne parlera de $F(Q)$ que lorsque Q est un polynôme ou une fraction rationnelle autre que constant et égal à un pôle de F.

G) Remarques, définitions complémentaires

* F est paire $\Leftrightarrow \widetilde{F}$ est paire
$\Leftrightarrow F(-X)=F(X)$
* F est impaire $\Leftrightarrow \widetilde{F}$ est impaire
$\Leftrightarrow F(-X)=-F(X)$
* Soit $F\in \mathbb{C}(X)$. On a l'équivalence : F n'a pas de pôle dans $\mathbb{C}$(X) $\Leftrightarrow F\in\mathbb{C}[X]$.
* Soit $F\in \mathbb{C}(X)$, $a\in\mathbb{C}$. Alors :

(1) Il existe $r\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $B(a,r)\setminus\{a\}$ ne contienne aucun pôle de F. On peut donc considérer la fonction :

$$\varphi : \left]-r,r\right[\setminus\{0\}\to\mathbb{K}$$
$$t\mapsto F(a+t)$$

(2) a est pôle de F $\Leftrightarrow \varphi$ admet une limite infinie à droite et à gauche en 0 (et dans ce cas la multiplicité du pôle a de F est le plus petit entier $k\in\mathbb{N}$ tel que $t\mapsto t^kF(a+t)$ ait une limite finie en 0)

(3) a est zéro de F $\Leftrightarrow \varphi$ tend vers 0 en 0.

(4) a n'est ni zéro ni pôle de F $\Leftrightarrow \varphi$ admet une limite finie non nulle en 0.

III Partie entière

A) Proposition et définition

Soit $F\in\mathbb{K}(X)$. Alors il existe un et un seul polynôme $E\in\mathbb{K}[X]$ tel que $F=E+F_1$ avec $F_1\in\mathbb{K}(X)$ et $\deg F_1<0$. E s'appelle la partie entière de F.

Démonstration :

1) unicité :

Si $F=E_1+F_1$ et $F=E_2+F_2$ avec $\deg F_1,F_2<0$

Alors $\underbrace{E_1-E_2}_{\deg\in\mathbb{N}\cup\{-\infty\}} = \underbrace{F_1-F_2}_{\deg\ \leq\max(\deg(F_1),\deg(F_2))<0}$

Donc $E_1-E_2=F_1-F_2=0$. Donc $E_1=E_2$ et $F_1=F_2$.

2) existence :

$F=\dfrac{P}{Q}$. Division euclidienne de P par Q : $P=P_1Q+R_1$, avec $R_1\in\mathbb{K}[X]$, de $\deg R_1<\deg Q$, et $P_1\in\mathbb{K}[X]$

Donc $F=\dfrac{P_1Q+R_1}{Q}=P_1+\dfrac{R_1}{Q}$ avec $\deg R_1<\deg Q$

B) Exemples

- partie entière de $\dfrac{X+2}{X-1}$: 1. Partie entière de $\dfrac{X^3+2X}{X^3+X^2-1}$: 1

- Plus généralement, partie entière de $\dfrac{aX^n+\ldots}{bX^n+\ldots}$: $\dfrac{a}{b}$
- Partie entière de $F=\dfrac{2X^2+X}{X-3}$:

$$2X^2+X=2X(X-3)+7X=2X(X-3)+7(X-3)+21=(2X+7)(X-3)+21$$

Donc $F=\underbrace{2X+7}_{\text{partie entière}}+\dfrac{21}{X-3}$

- Partie entière de $F=\dfrac{(X-1)^7}{(X+2)(X+1)^5}$: de la forme $X+b$

$(X-1)^7=X^7-7X^6+21X^5+\ldots$

$(X+2)(X+1)^5=(X+2)=(X+2)(X^5+5X^4+\ldots)=X^6+7X^5+\ldots$

$$\begin{array}{l|l} X^7-7X^6+21X^5+\ldots & X^6+7X^5 \\ \hline \quad 14X^6+\ldots & X-14 \end{array}$$

Donc $F=X-14+R_1$

IV Décomposition en éléments simples

A) Première décomposition

Lemme :

Soit $F=\dfrac{P}{Q_1Q_2}$, où $P\in\mathbb{K}[X]$, $Q_1,Q_2\in\mathbb{K}[X]$ et $\text{pgcd}(Q_1,Q_2)=1$.

Alors il existe $P_1,P_2\in\mathbb{K}[X]$ tels que $F=\dfrac{P_1}{Q_1}+\dfrac{P_2}{Q_2}$

Démonstration :

Selon le théorème de Bézout, il existe $U_1,U_2\in\mathbb{K}[X]$ tels que $U_1Q_1+U_2Q_2=1$

Donc $PU_1Q_1+PU_2Q_2=P$

Donc $\dfrac{PU_1Q_1+PU_2Q_2}{Q_1Q_2}=\dfrac{P}{Q_1Q_2}$. Donc $\dfrac{P}{Q_1Q_2}=\dfrac{PU_1}{Q_2}+\dfrac{PU_2}{Q_1}$

Théorème :

Soit $F=\dfrac{A}{Q_1Q_2\ldots Q_n}$ où $A\in\mathbb{K}[X]$ et les Q_i sont des polynômes non nuls premiers entre eux deux à deux.

Alors *F* se décompose de manière unique sous la forme :

$$F=E+\frac{A_1}{Q_1}+\frac{A_2}{Q_2}+\ldots+\frac{A_n}{Q_n}\ \text{ où }\ \forall i\in[\![1,n]\!], A_i\in\mathbb{K}[X]\text{ et }\deg A_i<\deg Q_i$$

Démonstration :

(1) existence : par récurrence sur *n*.

Pour $n=2$: le lemme donne $F=\dfrac{P_1}{Q_1}+\dfrac{P_2}{Q_2}$, avec $P_1,P_2\in\mathbb{K}[X]$

La division euclidienne de P_1 par Q_1 et de P_2 par Q_2 donne :

$P_1 = E_1Q_1 + A_1$ et $P_2 = E_2Q_2 + A_2$

Donc $F = E_1 + E_2 + \frac{A_1}{Q_1} + \frac{A_2}{Q_2}$ avec $\deg A_1 < \deg Q_1$ et $\deg A_2 < \deg Q_2$.

Supposons que c'est vrai pour un entier naturel $n \geq 2$.

$F = \frac{A}{Q_1Q_2...Q_nQ_{n+1}}$, où les Q_i sont premiers entre eux deux à deux. On applique le lemme (Q_{n+1} est premier avec chaque Q_i, $i \leq n$, donc avec $Q_1Q_2...Q_n$)

Donc $F = \frac{P}{Q_1Q_2...Q_n} + \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$. On applique ensuite l'hypothèse de récurrence, et on fait la division euclidienne de P_{n+1} par Q_{n+1}

(2) unicité : supposons que $F = E + \frac{A_1}{Q_1} + \frac{A_2}{Q_2} + ... + \frac{A_n}{Q_n}$

Déjà, E est la partie entière de F :

$E \in \mathbb{K}[X]$ et $\deg\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{Q_i}\right) \leq \max_{i\in[\![1,n]\!]} \deg\left(\frac{A_i}{Q_i}\right) < 0$

Si on a une deuxième décomposition :

$F = E + \frac{B_1}{Q_1} + \frac{B_2}{Q_2} + ... + \frac{B_n}{Q_n}$ où $\forall i \in [\![1,n]\!], B_i \in \mathbb{K}[X]$ et $\deg B_i < \deg Q_i$

Donc $\frac{A_1}{Q_1} + \frac{A_2}{Q_2} + ... + \frac{A_n}{Q_n} = \frac{B_1}{Q_1} + \frac{B_2}{Q_2} + ... + \frac{B_n}{Q_n}$

On obtient alors :

$$Q_1Q_2...Q_n\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{Q_i}\right) = Q_1Q_2...Q_n\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{B_i}{Q_i}\right)$$

$$\underbrace{Q_1Q_2...Q_n\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{C_i}{Q_i}\right)}_{\text{divisible par } Q_n} + Q_1Q_2...Q_{n-1}C_n = 0 \text{ où } \forall i \in [\![1,n]\!], C_i = A_i - B_i$$

Donc Q_n divise $Q_1Q_2...Q_{n-1}C_n$. Donc Q_n divise C_n.

Donc $C_n = 0$ car $\deg C_n \leq \max(\deg A_n, \deg B_n) < \deg Q_n$

Et, de proche en proche, $\forall i \in [\![1,n]\!], C_i = 0$

Donc $\forall i \in [\![1,n]\!], A_i = B_i$

B) Deuxième décomposition

Théorème :

Soit $F = \frac{A}{Q^n}$ où $A \in \mathbb{K}[X]$, $Q \in \mathbb{K}[X]$, $n \in \mathbb{N}^*$

Alors F s'écrit de manière unique sous la forme $F = E + \frac{P_1}{Q} + \frac{P_2}{Q^2} + ... + \frac{P_n}{Q^n}$, où $E \in \mathbb{K}[X]$ et $\forall i \in [\![1,n]\!], P_i \in \mathbb{K}[X]$ et $\deg P_i < \deg Q$

Démonstration :
(1) Existence

$F = \dfrac{A}{Q^n} = \dfrac{D_1 Q + P_n}{Q^n}$ (Division euclidienne de A par Q)

Donc $F = \dfrac{D_1}{Q^{n-1}} + \dfrac{P_n}{Q^n}$ avec $\deg P_n < \deg Q$

La division euclidienne de D_1 par Q donne ensuite, de la même manière :

$F = \dfrac{D_2}{Q^{n-2}} + \dfrac{P_{n-1}}{Q^{n-1}} + \dfrac{P_n}{Q^n}$

Et ainsi de suite :

$F = \dfrac{D_{n-1}}{Q} + \dfrac{P_2}{Q^2} + ... + \dfrac{P_n}{Q^n}$. Enfin, la division euclidienne de D_{n-1} par Q donne :

$F = E + \dfrac{P_1}{Q} + \dfrac{P_2}{Q^2} + ... + \dfrac{P_n}{Q^n}$

(2) Unicité

Si $F = E + \dfrac{P_1}{Q} + \dfrac{P_2}{Q^2} + ... + \dfrac{P_n}{Q^n}$, où $\forall i \in [\![1, n]\!], \deg P_i < \deg Q$, on a alors :

$EQ^n + P_1 Q^{n-1} + P_2 Q^{n-2} + ... + P_n = A$ Donc P_n est le reste dans la division euclidienne de A par Q, d'où l'unicité de P_n. On note ensuite A_1 le quotient de cette division euclidienne…

C) Décomposition en éléments simples

Définition : un élément simple de $\mathbb{K}(X)$ est une fraction rationnelle du type $\dfrac{P}{Q^n}$, où $Q \in \mathbb{K}[X]$ est irréductible, $n \in \mathbb{N}^*$, et $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$, de degré $< \deg Q$.

Exemples :

- $\dfrac{\lambda}{(X-a)^n}$ où $a \in \mathbb{K}$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$ est un élément simple de $\mathbb{K}(X)$.
- Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, elles sont les seuls éléments simples de $\mathbb{C}(X)$
- Les éléments simples de $\mathbb{R}(X)$ sont les :

1ère espèce : $\dfrac{\lambda}{(X-a)^n}$, où $a \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

2ème espèce : $\dfrac{\lambda X + \mu}{(X - sX + p)^n}$, où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, s, p \in \mathbb{R}, s^2 - 4p < 0, n \in \mathbb{N}^*$

Théorème :

Soit $F = \dfrac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$, où $A \in \mathbb{K}[X]$ et $B \in \mathbb{K}[X] \setminus \mathbb{K}_0[X]$ (ainsi, $F \notin \mathbb{K}[X]$)

B s'écrit sous la forme $Q_1^{\alpha_1}Q_2^{\alpha_2}...Q_n^{\alpha_n}$ où les Q_i sont irréductibles, non associés deux à deux et les $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$.

Alors F s'écrit de manière unique sous la forme :

$$F = \underbrace{E}_{\in \mathbb{K}[X]} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{\alpha_i} \underbrace{\frac{A_{ij}}{Q_i^j}}_{\text{élément simple}}}_{\substack{\text{partie polaire de } F \text{ relative} \\ \text{au facteur irréductible } Q_i}}, \text{ où } \forall i \in [\![1,n]\!], \forall j \in [\![1,\alpha_i]\!], \deg A_{ij} < \deg Q_i$$

Démonstration :

(1) Existence :

Selon l'étape 1, on a :

$$F = E + \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{Q_i^{\alpha_i}}, \text{ où } \forall i \in [\![1,n]\!], \deg A_i < \deg Q_i^{\alpha_i}$$

Et, selon l'étape 2, on a, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:

$$\frac{A_i}{Q_i^{\alpha_i}} = \underbrace{E_i}_{\substack{=0 \text{ car} \\ \deg A_i < \deg Q_i^{\alpha_i}}} + \sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{A_{ij}}{Q_i^j}, \text{ où } \forall j \in [\![1,\alpha_i]\!], \deg A_{ij} < \deg Q_i$$

(2) Unicité

On décompose F sous la forme $F = E + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{A_{ij}}{Q_i^j}$.

Pour chaque $i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{A_{ij}}{Q_i^j}$ s'écrit sous la forme $\frac{A_i}{Q_i^{\alpha_i}}$, où $A_i \in \mathbb{K}[X]$. Ces A_i sont déterminés de manière unique d'après la première décomposition. Ensuite, chacun de ces A_i, $\frac{A_i}{Q_i^{\alpha_i}}$ se décompose de manière unique sous la forme $\sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{A_{ij}}{Q_i^j}$. D'où l'unicité.

Remarque : ceci est valable même si (A,B) n'est pas un représentant irréductible de F, mais si (A,B) est irréductible, les A_{i,α_i} sont tous non nuls (en effet, si $A_{i,\alpha_i} = 0$, alors, en remettant au même dénominateur la décomposition, on obtient $F = \frac{A_1}{B_1}$, où $B_1 = Q_1^{\alpha_1}Q_2^{\alpha_2}...Q_i^{\alpha_i - 1}...Q_n^{\alpha_n}$ donc (A,B) n'était pas irréductible)

Exemples :

$$F = \frac{X^{10}+1}{(X^3-1)^2(X+2)} \begin{array}{l} \leftarrow A \\ \leftarrow B \end{array}$$

$$B = (X^3-1)^2(X+2) = (X-1)^2(X-j)^2(X-j^2)^2(X+2)$$

$A(-2), A(1), A(j), A(j^2)$ sont non nuls. Donc $\mathrm{pgcd}(A,B) = 1$

$$F = X^3 + bX^2 + cX + d + \underbrace{\frac{\lambda}{X+2}}_{\substack{\text{partie polaire realtive} \\ \text{au pôle } -2}} + \underbrace{\frac{\alpha}{X-1} + \frac{\beta}{(X-1)^2}}_{\text{partie polaire relative au pôle 1}} + \underbrace{\frac{\alpha'}{X-j} + \frac{\beta'}{(X-j)^2}}_{\text{partie polaire relative au pôle } j}$$
$$+ \frac{\alpha''}{X-j^2} + \frac{\beta''}{(X-j^2)^2}$$

Attention : on ne peut utiliser le terme de partie polaire relative à un nombre (comme dans l'exemple donné) que lorsqu'on travaille dans $\mathbb{C}(X)$.

V Pratique de la décomposition

Exemple : $F = \dfrac{X}{(X^4-1)(X^2-1)} \begin{matrix} \leftarrow A \\ \leftarrow B \end{matrix}$ à décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$:

(1) Factorisation du dénominateur :

$B = (X^4-1)(X^2-1) = (X-i)(X+i)(X-1)^2(X+1)^2$. On a donc les racines $i, -i, 1, -1$.

Donc (A, B) est irréductible. Les pôles de F sont donc $i, -i, 1, -1$ avec les multiplicités $1, 1, 2, 2$.

(2) Partie entière : obtenue en faisant la division euclidienne de A par B. Ici 0.

(3) Forme de la décomposition :

$$F = 0 + \frac{\alpha}{X-i} + \frac{\alpha'}{X+i} + \frac{\beta}{X-1} + \frac{\gamma}{(X-1)^2} + \frac{\beta'}{X+1} + \frac{\gamma'}{(X+1)^2} \text{ où } \alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma' \in \mathbb{C}$$

(Remarque : $\alpha, \alpha', \gamma, \gamma' \neq 0$)

(4) Considération de symétries

Ici, $F = \dfrac{X}{(X^4-1)(X^2-1)}$. Donc $F(-X) = -F(X)$ (impaire)

On a :

$$\underbrace{F(-X)}_{-F(X)} = \frac{-\alpha}{X+i} + \frac{-\alpha'}{X-i} + \frac{-\beta}{X+1} + \frac{\gamma}{(X+1)^2} + \frac{-\beta'}{X-1} + \frac{\gamma'}{(X-1)^2}$$

D'où, par unicité de la décomposition, on obtient :

$\alpha' = \alpha,\ \beta' = \beta,\ \gamma' = -\gamma$

$$F = \frac{\alpha}{X-i} + \frac{\alpha}{X+i} + \frac{\beta}{X-1} + \frac{\gamma}{(X-1)^2} + \frac{\beta}{X+1} - \frac{\gamma}{(X+1)^2}$$

(5) Détermination des parties polaires

- D'abord celles relatives à des pôles simples (c'est plus simple☺)

En effet

Pour $F = \dfrac{A}{B}$, si a est un pôle simple de F, c'est-à-dire si $\begin{cases} (X-a)Q = B \text{ avec } Q(a) \neq 0 \\ A(a) \neq 0 \end{cases}$.

Alors $F = \dfrac{\lambda}{(X-a)} + G$ où G est une fraction rationnelle dont a n'est pas pôle.

Donc $\underbrace{(X-a)F}_{=\frac{A}{Q}\text{, fraction rationnelle dont } a \text{ n'est pas pôle}} = \lambda + \underbrace{(X-a)G}_{\text{fraction rationnelle dont } a \text{ est un zéro}}$. Donc $\dfrac{A(a)}{Q(a)} = \lambda$

Ici, $\underbrace{F \times (X-i)}_{\frac{X}{(X+i)(X^2-1)^2}} = \alpha + (X-i) \times G$, où $G = \dfrac{\alpha}{X+i} + \dfrac{\beta}{X-1} + \dfrac{\gamma}{(X-1)^2} + \dfrac{\beta}{X+1} - \dfrac{\gamma}{(X+1)^2}$.

Donc $\alpha = \dfrac{i}{(i+i)(i^2-1)^2} = \dfrac{1}{8}$

Remarque : dans certains cas, calculer $Q(a)$ n'est pas aisé.
On a : $B=(X-a)Q$. Donc $B'=(X-a)Q'+Q$. Donc $B'(a)=Q(a)$
Ainsi, $\lambda=\dfrac{A(a)}{Q(a)}=\dfrac{A(a)}{B'(a)}$

- Les pôles multiples : d'abord les pôles doubles

Pour $F=\dfrac{A}{B}$, si a est pôle double de F : $\begin{cases}(X-a)^2Q=B \text{ avec } Q(a)\neq 0\\ A(a)\neq 0\end{cases}$.

$F=\dfrac{\lambda_1}{(X-a)}+\dfrac{\lambda_2}{(X-a)^2}+G$ où a n'est pas pôle de G.

Calcul de λ_2 : en multipliant l'égalité par $(X-a)^2$, on obtient :

$\underbrace{F\times(X-a)^2}_{=\frac{A}{Q}}=\lambda_1(X-a)^2+\lambda_2+(X-a)^2G$

En remplaçant X par a, on a alors $\lambda_2=\dfrac{A(a)}{Q(a)}$.

Pour calculer λ_1, on a deux méthodes :

1ère méthode :

On dérive la deuxième égalité : $\left(\dfrac{A}{Q}\right)'=\lambda_1+2(X-a)G+(X-a)^2G'$

Ainsi, $\lambda_1=\left(\dfrac{A}{Q}\right)'(a)$

2ème méthode :

On connaît déjà λ_2. D'après la première égalité, $F-\dfrac{\lambda_2}{(X-a)^2}=\dfrac{\lambda_1}{(X-a)}+G$. D'après le membre de droite, celui de gauche n'a a pour pôle que d'ordre au maximum 1.

Le calcul donne $F_1=F-\dfrac{\lambda_2}{(X-a)^2}=\dfrac{A_1}{(X-a)Q_1}$.

On est ensuite ramené au problème du pôle simple.

Application sur l'exemple :

$$F=\frac{\beta}{X-1}+\frac{\gamma}{(X-1)^2}+G$$
$$=\frac{X}{(X-1)^2(X^2+1)(X+1)^2}$$

Donc $\dfrac{X}{(X^2+1)(X+1)^2}=\beta(X-1)+\gamma+(X-1)^2G$. Donc $\gamma=\dfrac{1}{2\times 2^2}=\dfrac{1}{8}$

Méthode 1 :

$$\frac{(X+1)^2(X^2+1)-X(2(X+1)(X^2+1)+(X+1)^2 2X)}{(X+1)^4(X^2+1)^2}=\beta+G'(X-1)^2+2G(X-1)$$

$$\frac{(X+1)(X^2+1)-2X(X^2+1)-(X+1)\times 2X^2}{(X+1)^3(X^2+1)^2}=\beta+G'(X-1)^2+2G(X-1)$$

Donc $\beta = \frac{-1}{8}$

Méthode 2 :

$$F - \frac{\gamma}{(X-1)^2} = \frac{X}{(X-1)^2(X^2+1)(X+1)^2} - \frac{1}{8(X-1)^2}$$

$$= \frac{8X - (X+1)^2(X^2+1)}{8(X-1)^2(X+1)^2(X^2+1)} \begin{array}{l}\leftarrow \text{on vérifie que c'est nul en 1} \\ \text{puisque 1 est au mieux pôle simple}\end{array}$$

$$8X - (X+1)^2(X^2+1) = 8(X-1+1) - (X-1+2)(X+1)(X^2+1)$$

$$= (X-1)[8-(X+1)(X^2+1)] + 8 - 2(X+1)(X^2+1)$$

$$8 - 2(X+1)(X^2+1) = 8 - 2(X-1+2)(X^2+1)$$

$$= (X-1)[-2(X^2+1)] + 8 - 4(X^2+1)$$

$$= (X-1)[-2(X^2+1)] - 4(X^2-1)$$

Donc $F - \frac{\gamma}{(X-1)^2} = \frac{8-(X+1)(X^2+1)-2(X^2+1)-4(X+1)}{8(X-1)(X+1)^2(X^2+1)} = \frac{\beta}{(X-1)} + G$

Ainsi, $\beta = \frac{8-2\times2-2\times2-4\times2}{8\times2^2\times2} = \frac{-1}{8}$

(6) Conclusion :

$$F = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{X-i} + \frac{1}{X+i} - \frac{1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} - \frac{1}{X+1} - \frac{1}{(X+1)^2}\right)$$

Intérêt de la décomposition en éléments simples : pour l'intégration.

Exemples :

* $F = \frac{1}{X^2-a^2}$ où $a \in \mathbb{C}^*$

Partie entière nulle ($\deg F = -2$)

Forme de la décomposition :

$$F = \frac{\alpha}{X-a} + \frac{\beta}{X+a}$$

On multiplie par $X-a$, on prend la valeur en a : $\alpha = \frac{1}{2a}$

De même, $\beta = \frac{-1}{2a}$

Donc $\frac{1}{X^2-a^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{X-a} - \frac{1}{X+a}\right)$

* $F = \frac{1}{X^n-1}$

Forme de la décomposition : $F = \frac{\alpha_0}{X-\omega_0} + \frac{\alpha_1}{X-\omega_1} + \ldots + \frac{\alpha_{n-1}}{X-\omega_{n-1}}$ où $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$.

Pour chaque k : on multiplie par $X-\omega_k$. On obtient $\frac{1}{Q} = \alpha_k + (X-\omega_k)G$, où Q est tel que $X^n - 1 = (X-\omega_k)Q$

Donc $\alpha_k = \dfrac{1}{Q(\omega_k)}$

On a : $X^n - 1 = (X-\omega_k)Q$. Donc, en dérivant :

$nX^{n-1} = Q + (X-\omega_k)Q'$

Donc $\alpha_k = \dfrac{1}{n\omega_k^{n-1}} = \dfrac{\omega_k}{n}$

Donc $F = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{\omega_0}{X-\omega_0} + \dfrac{\omega_1}{X-\omega_1} + \ldots + \dfrac{\omega_{n-1}}{X-\omega_{n-1}}\right)$

Autre méthode :

On multiplie par $X-1$. D'où $\alpha_0 = \dfrac{1}{Q(1)}$ où $Q = 1 + X + \ldots + X^{n-1}$

Donc $\alpha_0 = \dfrac{1}{n}$

On remarque que :

$F(\omega_1 X) = \dfrac{1}{(\omega_1 X)^n - 1} = \dfrac{1}{X^n - 1} = F(X)$

On a donc :

$$F = \frac{\alpha_0}{\omega_1 X - \omega_0} + \frac{\alpha_1}{\omega_1 X - \omega_1} + \ldots + \frac{\alpha_{n-1}}{\omega_1 X - \omega_{n-1}}$$

$$= \frac{\alpha_0}{\omega_1}\frac{1}{X - \underbrace{\omega_0/\omega_1}_{\omega_{n-1}}} + \frac{\alpha_1}{\omega_1}\frac{1}{X-1} + \ldots + \frac{\alpha_{n-1}}{\omega_1}\frac{1}{X-\omega_{n-2}}$$

Donc $\alpha_{n-1} = \dfrac{\alpha_0}{\omega_1}$, $\alpha_0 = \dfrac{\alpha_1}{\omega_1}$ ... $\alpha_{n-2} = \dfrac{\alpha_{n-1}}{\omega_1}$. Comme α_0 est connu, on peut trouver les autres.

* $F = \dfrac{1}{(X^n-1)^2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(\dfrac{\alpha_k}{X-\omega_k} + \dfrac{\beta_k}{(X-\omega_k)^2}\right)$

Symétries :

$F(\omega_1 X) = F(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(\dfrac{\alpha_k}{\omega_1 X-\omega_k} + \dfrac{\beta_k}{(\omega_1 X-\omega_k)^2}\right)$

Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a :

$\dfrac{\beta_k}{(\omega_1 X - \omega_k)^2} = \dfrac{\beta_k}{\omega_1^2}\dfrac{1}{(X-\omega_{k-1})^2}$, $\dfrac{\alpha_k}{\omega_1 X - \omega_k} = \dfrac{\alpha_k}{\omega_1}\dfrac{1}{X-\omega_{k-1}}$ (avec $\omega_{-1} = \omega_{n-1}$)

D'où : $\forall k \in [\![0, n-1]\!], \dfrac{\alpha_k}{\omega_1} = \alpha_{k-1}$ et $\dfrac{\beta_k}{\omega_1^2} = \beta_{k-1}$

D'où, $\forall k \in [\![0, n-1]\!], \begin{cases} \alpha_k = \omega_1^k \alpha_0 = \omega_k \alpha_0 \\ \beta_k = \omega_1^{2k}\beta_0 = \omega_{2k}\beta_0 \end{cases}$

Obtention de α_0 et β_0 :

$F = \dfrac{1}{(X^n-1)^2} = \dfrac{\alpha_0}{X-1} + \dfrac{\beta_0}{(X-1)^2} + G$

Donc, en multipliant par $(X-1)^2$ et en prenant la valeur en 1, on trouve $\beta_0=\dfrac{1}{n^2}$.

$$F=\frac{1}{(\underbrace{1+X+...+X^{n-1}}_{Q})^2}=\alpha_0(X-1)+\beta_0+G(X-1)^2$$

En dérivant, on obtient :

$$\frac{-2Q'}{Q^3}=\alpha_0+(X-1)^2G'+2(X-1)G$$

Valeur en 1 : $\alpha_0=\dfrac{-2Q'(1)}{n^3}$; $Q'(1)=(n-1)+(n-2)+...+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$

Donc $\alpha_0=\dfrac{-(n-1)}{n^2}$

* $F=\dfrac{1}{(X^2-X+1)^2(X-1)}$ dans $\mathbb{C}(X)$: pôles $-j,-j^2,1$

$$F=\frac{\alpha}{X+j}+\frac{\beta}{(X+j)^2}+\frac{\alpha'}{X+j^2}+\frac{\beta'}{(X+j^2)^2}+\frac{\gamma}{X-1}$$

Symétries :

Pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$, $F(x)\in\mathbb{R}$ (car $F\in\mathbb{R}(X)$)

Donc $\overline{F(x)}=F(x)$

Or, $F(x)=\dfrac{\alpha}{x+j}+\dfrac{\beta}{(x+j)^2}+\dfrac{\alpha'}{x+j^2}+\dfrac{\beta'}{(x+j^2)^2}+\dfrac{\gamma}{x-1}$

Et $\overline{F(x)}=\dfrac{\overline{\alpha}}{x+j^2}+\dfrac{\overline{\beta}}{(x+j^2)^2}+\dfrac{\overline{\alpha}'}{x+j}+\dfrac{\overline{\beta}'}{(x+j)^2}+\dfrac{\overline{\gamma}}{x-1}$ (rappel : $j^2=\overline{j}$)

Donc $F=\dfrac{\overline{\alpha}}{X+j^2}+\dfrac{\overline{\beta}}{(X+j^2)^2}+\dfrac{\overline{\alpha}'}{X+j}+\dfrac{\overline{\beta}'}{(X+j)^2}+\dfrac{\overline{\gamma}}{X-1}$ (car les deux fractions rationnelles coïncident sur une infinité de valeurs, à savoir $\mathbb{R}\setminus\{1\}$)

Donc, par unicité de la décomposition en éléments simples :

$\alpha'=\overline{\alpha}$, $\beta'=\overline{\beta}$, $\gamma\in\mathbb{R}$

En multipliant par $X-1$ et en prenant la valeur en 1, on obtient $\gamma=\dfrac{1}{1^2}=1$

En multipliant par $(X+j)^2$ on obtient la valeur de β, puis α en dérivant…

Remarques à propos de la décomposition dans $\mathbb{R}(X)$:

1ère idée : mauvaise quand les pôles non réels sont d'ordre plus grand (ou égal) à 2 :

Pour $F=\dfrac{A}{B}$ irréductible :

Si *B* a toutes ses racines dans $\mathbb{R}$, on procède comme dans $\mathbb{C}(X)$

Si *B* a une racine *a* non réelle, alors $\overline{a}$ est aussi racine de *B* avec la même multiplicité :

- Si cette multiplicité vaut 1 :

$B=\underbrace{(X-a)(X-\overline{a})}_{X^2-sX+p}Q$, où $Q(a)\neq 0$

La décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ donne :

$$F = \frac{\lambda}{X-a} + \frac{\overline{\lambda}}{X-\overline{a}} \leftarrow \text{voir exemple précédent} + G = \frac{(\lambda+\overline{\lambda})X - (a\overline{\lambda}+\overline{a}\lambda)}{X^2 - sX + p} + G$$

- Si cette multiplicité est ≥ 2 (ici, 2)

La décomposition dans $\mathbb{C}(X)$ donne :

$$F = \underbrace{\frac{\lambda}{X-a} + \frac{\overline{\lambda}}{X-\overline{a}}}_{\frac{(\lambda+\overline{\lambda})X-(a\overline{\lambda}+\overline{a}\lambda)}{X^2-sX+p}} + \underbrace{\frac{\mu}{(X-a)^2} + \frac{\overline{\mu}}{(X-\overline{a})^2}}_{\frac{\mu(X-\overline{a})^2+\overline{\mu}(X-a)^2}{(X^2-sX+p)^2} \leftarrow \text{non simple}} + G$$

(Remarque : on peut quand même s'en sortir avec la décomposition de la forme $\dfrac{A}{Q^n} = E + \dfrac{A_1}{Q_1} + \dfrac{A_2}{Q_2} + \ldots + \dfrac{A_n}{Q_n}$)

Autre idée : (pour un pôle a non réel d'ordre 2)

Ecrire la forme de la décomposition dans $\mathbb{R}(X)$:

$$F = \frac{\lambda X + \mu}{X^2 - sX + p} + \frac{\lambda' X + \mu'}{(X^2 - sX + p)^2} + G$$

En multipliant par $(X^2 - sX + p)^2$ et en prenant la valeur en a, on obtient la valeur de $\lambda' a + \mu'$ d'où λ' et μ' car $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et $\lambda', \mu' \in \mathbb{R}$ ($(1, a)$ est une famille libre du $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{C}$)

Ensuite, par dérivation, on peut obtenir λ et μ