Suites récurrentes homographiques

1 Enoncé

Soit I l'intervalle $[0,1]$. On considère la fonction f définie sur I par $f(x) := \dfrac{3x+2}{x+4}$.

1. Etudiez les variations de f et en déduire que, pour tout x élément de I, $f(x)$ appartient à I.
2. On considère la suite (u_n) définie par
$$u_0 = 0 \text{ et } u_{n+1} := \frac{3u_n+2}{u_n+4}.$$
Montrez que, pour tout n, u_n appartient à I.

On se propose d'étudier la suite (u_n) par deux méthodes différentes.

Première Méthode

3. (a) Représenter graphiquement f dans un repère orthonormal d'unité graphique 10 cm.
   (b) En utilisant le graphique précédent, placer les points A_0, A_1, A_2 et A_3 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0, u_1, u_2 et u_3.
   Que suggère le graphique concernant le sens de variation de (u_n) et sa convergence?
   (c) Etablir la relation
   $$u_{n+1} - u_n = \frac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}.$$
   On pourra d'abord calculer $f(x) - x$.
   (d) En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
   (e) Démontrer que la suite (u_n) est convergente.
   (f) Prouver que la limite l de la suite (u_n) vérifie $l = f(l)$ et calculer l.

Deuxième Méthode Soit $v_n := \dfrac{u_n-1}{u_n+2}$.

4. (a) Prouver que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{5} = f'(l)$.
   (b) Calculer v_0 et exprimer v_n en fonction de n.
   (c) Exprimer u_n en fonction de v_n, puis en fonction de n.
   (d) En déduire la convergence de la suite (u_n) et sa limite.

2 Travail demandé au candidat

Pendant sa préparation le candidat réfléchira aux questions suivantes:

1. Expliquez pourquoi cette exercice est particulièrement adapté à un sujet de Bac S et ES.
2. Comparez les deux méthodes proposées.
3. En classe de TS, s'il fallait choisir qu'une des deux méthodes, quelles méthodes recommanderiez-vous aux élèves?
4. Proposez une alternative à la question 3.(c) à l'aide du graphe de f et de sa position par rapport à la première bissectrice.
5. Proposez une modification de l'énoncé pour que le comportement de la suite récurrente soit différente.
6. Justifiez mathématiquement au niveau de l'écrit du concours la deuxième méthode. Et donnez une liste de comportements possibles de ce genre de suite homographique.
7. L'énoncé fournit un intervalle I d'étude. Cela est-il important? Que se passe-t-il si on travaille sur un autre intervalle J? si $J = \mathbb{R}$ par exemple?
8. $(\tan(n))_n$ est-elle une suite homographique?
9. Proposez d'autres types d'énoncés pour faire travailler les élèves sur ce thème.

Le candidat rédigera sur ses fiches qu'il donnera au Jury les questions suivantes:

- la question 2.
- la question 4.
- la question 5.

<u>source</u>: Série Accompagnement des programmes, 2004, Enseignement obligatoire, baccalauréat séries S et ES