

Piste de travail pour le DS n° 2

Si $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\binom{n}{k}}{k}$ alors $S_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\binom{n-1}{k}}{k}$

Comme $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ on va essayer de remplacer dans $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\binom{n}{k}}{k}$ et on obtient que

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\binom{n}{k}}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\binom{n}{k}}{k} + \frac{\binom{n}{n}}{n} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\binom{n}{k}}{k} + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\binom{n-1}{k}}{k} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\binom{n-1}{k-1}}{k} + \frac{1}{n} = S_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\binom{n-1}{k-1}}{k} + \frac{1}{n}$$

Donc $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\binom{n-1}{k-1}}{k} = S_n - S_{n-1} - \frac{1}{n}$