Durée : 2h30 – Calculatrices non autorisées

PARTIE 1 : MATHEMATIQUES (1h45)

EXERCICE 1

On considère les suites $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(u_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{k} \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*,\ u_k = \frac{2^k - 1}{k}.$$

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   a) Donner S_1 puis, pour tout entier naturel $n \geq 2$, exprimer S_n à l'aide de n et de S_{n-1} en commençant par utiliser la formule du triangle de Pascal.
   b) En déduire une expression de S_n en fonction de certains termes de la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$.

2) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$, puis $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$. (On justifiera *rigoureusement* les résultats)

PROBLEME

Soit $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle telle que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $a_k \geq 0$.

On considère la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle P_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + a_k) = (1 + a_1)(1 + a_2)\ldots(1 + a_n)$.

Partie A

1) Etudier le sens de variation de la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

2) Etude de trois exemples
   a) Dans cette question on suppose que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $a_k = k$.
      Exprimer P_n en fonction de n (sans signe Π) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ puis donner $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n$. $=+\infty$
   b) Même question dans le cas où : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $a_k = \dfrac{1}{k}$
   c) On suppose à présent que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $a_k = e^{-k}$.
      On admet que : $\forall x \in [0, +\infty[$, $\ln(1 + x) \leq x$.
      (i) En utilisant ce le résultat, démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\quad \ln P_n \leq \dfrac{1}{e - 1}$.
      (On fera un raisonnement direct, en examinant l'expression $\ln P_n$, et non une récurrence)
      (ii) En déduire que la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

<u>On revient à présent au cas général.</u>

3) Montrer que si la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un réel L, alors $L \geq 1$.

4) Montrer que si la suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas vers 0, alors la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est divergente.
   (On pourra démontrer l'implication contraposée; on rappelle qu'une suite divergente est, par définition, une suite non convergente).
   La réciproque est-elle vraie ?
   Si la suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas vers 0, que dire de $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n$? (existe-t-elle ? Si oui quelle est-elle ?)
   Justifier la réponse.

Partie B

On considère la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{P_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\prod_{k=1}^{i}(1+a_k)}$.

1) Exemples :

a) Dans cette question on suppose que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ a_k = k$.
Exprimer S_n en fonction de n (sans signe Σ) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Indication : on pourra remarquer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $k = k + 1 - \cancel{k}$.
1
En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

b) Même question dans le cas où : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ a_k = \frac{1}{k}$.

2) Retour au cas général : on se propose de démontrer que quelle que soit la suite (a_k) à termes positifs ou nuls, la suite (S_n) est convergente. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose : $u_n = 1 - S_n$.

a) Calculer u_1, u_2, u_3 (sous forme factorisée).

b) Faire une conjecture sur l'expression de u_n en fonction de P_n et la démontrer par récurrence.
En déduire une expression de S_n sans signe Σ.

c) Conclure à l'aide de certains résultats de la partie A.