Sommes de Riemann - Réponses

Exercice 1 - Réponse

Somme de Riemann de la fonction

$x \mapsto f(x) = x^2$ avec $a = 0$ et $b = 1$ donc sur l'intervalle $[0,1]$

avec le choix de la borne droite pour chacun des n intervalles égaux de longueur 1/n

$$l_1 = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2$$

$$l_1 = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}\left[x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Remarque: la somme de Riemann s'écrit aussi en utilisant la borne gauche de chaque intervalle :

$$l_1 = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{i}{n}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

Exercice 2 - Réponse

Somme de Riemann de la fonction

$x \mapsto f(x) = \cos x$ (ou $\cos \pi x$)

avec le choix de la borne gauche pour chacun des n intervalles égaux de longueur

$\frac{\pi}{2n}$ (ou $\frac{1}{2n}$)

$$l_2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

Remarque: la somme de Riemann s'écrit aussi en utilisant la borne droite de chaque intervalle :

$$l_2 = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \cos\frac{k\pi}{n} = \frac{2}{\pi}$$

Exercice 3 - Réponse

$$l_3 = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 + kn}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k}{n}}}$$

Somme de Riemann de la fonction

$f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ $a = 0$ et $b = 1$

(ou encore $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ $a = 1$ et $b = 2$)

avec le choix de la borne gauche pour chacun des n intervalles égaux de longueur $\frac{1}{n}$

$$l_3 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x}} = 2\left[\sqrt{1+x}\right]_0^1 = 2(\sqrt{2} - 1)$$

Exercice 4 - Réponse

$$l_{12} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{\frac{p}{2n}}{\sqrt{1 - \left(\frac{p}{2n}\right)^2}} = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -2\left[\sqrt{1-x^2}\right]_0^{\frac{1}{2}} = 2 - \sqrt{3}$$

Exercice 5 - Réponse

$$l_4 = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^2}{n^2 + k^2} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 + (\frac{k}{n})^2} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \left[\operatorname{Arctan} x\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

Exercice 6 - Réponse

$$l = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{k^2 + n^2} = \frac{1}{2}\ln 2$$

Somme de Riemann de la fonction $x \mapsto f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ sur

l'intervalle $[0,2]$ avec le choix de la borne droite

pour chacun des 2n intervalles égaux de longueur 2n

$$l = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{\frac{k}{n}}{\left(\frac{k}{n}\right)^2 + 1} = \int_0^2 \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\left[\ln(x^2+1)\right]_0^2 = \frac{1}{2}\ln 5$$

Exercice 7 - Réponse

Soit $I_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 + (-1)^k k^2}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1 + (-1)^k (\frac{k}{n})^2}}$

$$I_n = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{1}{n})^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{2}{n})^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{3}{n})^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{4}{n})^2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{1+(-1)^{n-1}(\frac{n-1}{n})^2}}\right]$$

$\frac{2}{n}\left[\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{1}{n})^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{3}{n})^2}} + \ldots\right]$ est une somme de Riemann pour des subdivisions

régulières de pas $\frac{2}{n}$ associée à la fonction $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $[0,1]$

(intégrale généralisée convergente)

$\frac{2}{n}\left[\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{2}{n})^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{4}{n})^2}} + \ldots\right]$ est une somme de Riemann pour des subdivisions

régulières de pas $\frac{2}{n}$ associée à la fonction $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ sur $[0,1]$

d'où $\lim_{n \to +\infty} I_n = \frac{1}{2}\left(\left[\operatorname{Arcsin} x\right]_0^1 + \left[\ln(x + \sqrt{1+x^2})\right]_0^1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \ln(1+\sqrt{2})\right)$

Exercice 8 - Réponse

on pose $k = i + n$ et donc

si $k = n$ alors $i = 0$

si $k = 2n - 1$ alors $i = n - 1$

et la relation est démontrée

$$l = \lim_{n \to +\infty} n \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k^2} = \lim_{n \to +\infty} n \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(i+n)^2}$$

puis en divisant le numérateur et le dénominateur par n^2

$$l = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{n^2}{(i+n)^2} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(\frac{i}{n}+1)^2}$$

Somme de Riemann de la fonction $x \mapsto f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$

sur l'intervalle $[1,2]$ avec le choix de la borne gauche pour

chacun des n intervalles égaux de longueur $\frac{1}{n}$

(ou bien $x \mapsto f(x) = \frac{1}{x^2}$ sur $[1,2]$)

$$l = \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2} \left(\text{ou} \int_1^2 \frac{dx}{x^2}\right) = -\left[\frac{1}{x+1}\right]_0^1 \left(\text{ou} -\left[\frac{1}{x}\right]_1^2\right) = \frac{1}{2}$$

Exercice 9 - Réponse

La méthode consiste à faire la différence entre la somme à étudier et la somme de Riemann qui l'approche, et majorer cette différence par la formule de Taylor

$$l = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} (e^{\frac{1}{n+k}}) - n$$

posons $u_n = \sum_{k=1}^{n}\left[e^{\frac{1}{n+k}} - 1\right]$

pour n et k assez grands, $\frac{1}{n+k} \to 0$ et $e^t - 1 \underset{0}{\sim} t$

On peut penser que u n'est pas très loin de v avec $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$

or v_n est une somme de Riemann

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} v_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2$$

On applique la formule de Taylor – Lagrange à l'ordre 2 pour la fonction $f(t) = e^t$

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \exists \theta \in]0,1[\quad e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2}e^{\theta t}$$

$$\forall k \in [1,n] \qquad \left|e^{\frac{1}{n+k}} - 1 - \frac{1}{n+k}\right| \leq \frac{e^{\frac{1}{n+k}}}{2(n+k)^2} \leq \frac{e}{2n^2}$$

D'où par inégalité triangulaire et par sommation

$$|u_n - v_n| \leq \frac{e}{2n}$$

et $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} v_n = \ln 2$

Exercice 10 - Réponse

posons $u_n = \sum_{k=1}^{n}\left[e^{\frac{1}{n+k}} - 1\right]$

pour n et k assez grands $\frac{1}{\sqrt{n+k}} \to 0$ et $\operatorname{ch}t - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{t^2}{2}$

on peut penser que u n'est pâs très loin de v avec $v_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$

or v_n est une somme de Riemann

$$v_n = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \to \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \frac{1}{2}\ln 2$$

On applique alors la formule de Taylor Lagrange à l'ordre 2 pour la fonction $f(t) = \operatorname{ch}t$

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \exists \theta \in]0,1[\quad \operatorname{ch}t = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6}\operatorname{sh}\theta t$$

donc $\forall k \in [1,n] \qquad \left|\operatorname{ch}\frac{1}{\sqrt{k+n}} - 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{n+k}\right| \leq \frac{\operatorname{sh}1}{6n\sqrt{n}}$

D'où par l'inégalité triangulaire et par sommation

$$|u_n - v_n| \leq \frac{\operatorname{sh}1}{6\sqrt{n}}$$

et $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} v_n = \frac{1}{2}\ln 2$

Exercice 11 - Réponse

pour transformer le produit en somme, calculons u_n

$$\ln u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$$

Utilisons l'encadrement de $\ln(1+x)$ déduit de la formule des accroissements finis

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$$

En effectuant la somme depuis $k = 1$ jusqu'à $k = n$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} - \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2\right) < \ln u_n < \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2} \text{ et } \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

et donc $\frac{1}{2} - \frac{1}{6n} < \ln u_n < \frac{1}{2}$

et par passage à la limite $\lim_{n \to +\infty} \ln u_n = \frac{1}{2}$

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$