Chapitre 8

Suites et fonctions équivalentes

- Savoir manipuler les symboles $\sim$, o,
- Savoir les utiliser pour calculer des limites,
- Connaître les équivalents classiques,
- Éviter les pièges (somme et composition),
- Savoir rédiger la substitution pour la différencier d'une composition.

On attaque ici une partie que l'on reverra avec les dévelloppement limités, la notion de comparaison des suites : on va traduire les idées intuitives de *« cette suite est négligable devant celle-là »* ou *« ces deux suites tendent vers $+\infty$ à la même vitesse »*.

La motivation est d'éviter les pertes de temps du type :

$$\frac{\sin(2h)}{h} = 2\frac{\sin(2h)}{2h},$$

donc en posant $t = 2h$ on a :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(2h)}{h} = \lim_{t\to 0} 2\frac{\sin(t)}{t} = 2.$$

Pour laisser plus de place au raisonnement intuitif : *« $\sin 2h$ est du même ordre que h donc $\frac{\sin(2h)}{h}$ est de l'ordre de 2 »*.

I Définition

Intuitivement, on peut **négliger** a devant b si $\dfrac{a}{b}$ est très petit. Pour deux suites, cela se traduit en $\dfrac{a_n}{b_n}$ peut être rendu plus petit que toute précision ϵ arbitraire à partir d'un certain rang, *i.e.* $\lim_{n\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$. De même deux nombre **sont du même ordre** si $\dfrac{a}{b}$ est quasiment 1, ce qui se traduit pour deux suites par : $\lim \frac{a_n}{b_n} = 1$.

Le problème est qu'on divise par b_n qui peut être nul. Cela impose de compliquer la définition.

Définition 1. *Soit (a_n) et (b_n) deux suites réelles. On dit que a_n* ***est négligeable devant*** *b_n si il existe un suite ϵ_n tel que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \epsilon_n b_n$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} \epsilon_n = 0$. Dans le cas courant d'une suite b_n non nulle à partir d'un certains rang, c'est équivalent à $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$.*

On note dans ce cas $a_n = \underset{n+\infty}{o}(b_n)$.

Les deux suites a_n et b_n réelles sont dites ***équivalentes*** *si $a_n - b_n = \underset{n+\infty}{o}(b_n)$. Autrement dit, si il existe une suite ϵ_n tel que : $a_n = b_n + \epsilon_n b_n$, avec $\lim \epsilon_n = 0$. Dans le cas courant d'une suite b_n non nulle à partir d'un certains rang, c'est équivalent à $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$.*

On note alors $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$.

Pour deux suites complexes, on étend la définition de o si $|a_n| = \underset{+\infty}{o}(|b_n|)$.

Remarque:

- Une autre notation plus parlante que o est $a_n \ll b_n$.
- Remarquons que $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n \Leftrightarrow b_n \underset{+\infty}{\sim} a_n$ [1].
- Les définitions qu'il faut retenir sont celles faisant apparaître le quotient : pour démontrer que $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$, on formera toujours le quotient. Dans le programme de BCPST, il est écrit explicitement que l'on ne considère pas le cas où la suite est nulle.
- L'avantage d'un équivalent sur la limite est qu'il donne la vitesse de convergence : une limite ne dépends pas de n, un équivalent oui.

Piège 1 : Une suite (u_n) n'est jamais négligeable devant 0, ni équivalente à 0, à moins d'être nulle à partir d'un certain rang (cela n'a alors aucun intérêt).

En mettant $u_n \underset{+\infty}{\sim} 0$ dans une copie, on est assuré d'avoir faux à la question.

Piège 2 : Si $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$ et $w_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$, on a pas $u_n = v_n$. La notation o modifie donc le signe $=$, et il ne faut donc pas simplifier les o. Une autre manière de voir les choses et de dire que $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$ signifie : *« la suite (u_n) appartient à l'ensemble des suites négligeables devant la suite (v_n) ».*

Exemple:

- $n^2+n+1 \underset{+\infty}{\sim} n^2+n \underset{+\infty}{\sim} n^2+1 \underset{+\infty}{\sim} n^2$, la dernière forme étant la plus intéressante et en pratique c'est celle qui est utilisée,
- $\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^3} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^3} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}$, même remarque,
- $\ln(n) = \underset{+\infty}{o}(n^2) = \underset{+\infty}{o}(n) = \underset{+\infty}{o}(n\sqrt{n}) = \underset{+\infty}{o}(n^\beta)$, pour $\beta > 0$, traduit le fait que ln croît moins vite que toute les fonction puissances,
- $n^\alpha = \underset{+\infty}{o}(n^\beta)$, croissance comparée des fonctions puissances,
- Par contre, $\exp(n^2+n+1)$ n'est pas équivalent à $\exp(n^2)$, puisque le rapport fait $\exp(n+1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

On utilise souvent une notation du type : $u_n = v_n + \underset{n\to+\infty}{o}(w_n)$, soit $u_n - v_n = \underset{n\to+\infty}{o}(w_n)$. Cette écriture signifie que *« la suite u_n se comporte comme la suite v_n à un w_n près »*. Souvent, w_n est un polynôme ou une fraction rationnelle.

1. C'est évident en utilisant la définition par quotient, pour la "vraie" définition on peut le démontrer.

Dans l'écriture $u_n = v_n + \underset{n\to+\infty}{o}(w_n)$, on peut faire passer des quantités de *gauche à droite du signe égal.*

Exemple: $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{3!n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$. Ce qui signifie que pour calculer $\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ pour n grand, on peut calculer $\frac{1}{n} - \frac{1}{3!n^3}$ et que l'erreur commise est petite devant $\frac{1}{n^3}$.

L'écriture $u_n \underset{n\to+\infty}{=} 2n^2 + 5n + o(n)$ signifie que la suite u_n se comporte comme la suite $2n^2 + 5n$ (suite simple), plus quelque chose de très petit devant n.

II Manipulation du symbole d'équivalence

Pour comprendre comment on peut manipuler les symboles o et $\sim$. Il faut garder en tête que cela signifie qu'une suite est « *très petite* » devant une autre ou du « *même ordre* ». En cas de doute, il faut toujours revenir à la définition avec le quotient, la plupart des propriétés se démontrent en une ligne.

★ Lien avec les limites

Proposition 1. *Pour une suite (u_n), on a :*

$$Sil \neq 0, \lim_{n\infty} u_n = l \Longleftrightarrow u_n \underset{+\infty}{\sim} l.$$

et

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 \Longleftrightarrow u_n = \underset{+\infty}{o}(1).$$

Ainsi, dans un calcul d'équivalent, on remplace une suite convergente par sa limite si celle-ci est non nulle.

On a :

Démonstration. C'est simplement la traduction du fait que $\lim_{n\infty} u_n = l$ est équivalent à $\lim_{n\infty} \frac{u_n}{l} = 1$ si $l \neq 0$ et à $\lim_{n\infty} \frac{u_n}{1} = 0$ si $l = 0$. □

★ Transitivité

Proposition 2. *Si $a_n = \underset{+\infty}{o}(b_n)$ et si $b_n = \underset{+\infty}{o}(c_n)$, alors $a_n = \underset{+\infty}{o}(c_n)$.*

Si $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$ et si $b_n \underset{+\infty}{\sim} c_n$, alors $a_n \underset{+\infty}{\sim} c_n$.

Démonstration. Il suffit de faire le quotient : $\frac{a_n}{c_n} = \frac{a_n}{b_n}\frac{b_n}{c_n}$ qui tends vers 0×0 ou 1×1. □

★ Multiplication par un scalaire (non nul)

Proposition 3. *Soit $\lambda \neq 0$, et $a_n = \underset{+\infty}{o}(b_n)$, on a $a_n = \underset{+\infty}{o}(\lambda b_n)$, et $\lambda a_n = \underset{+\infty}{o}(b_n)$.*

Soit $\lambda \neq 0$, et $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$, on a $\lambda a_n \underset{+\infty}{\sim} \lambda b_n$.

★ Compatibilté avec la multiplication

Proposition 4. *Si* $a_n = \underset{+\infty}{o}(c_n)$ *et si* $b_n = \underset{+\infty}{o}(d_n)$*, alors* $a_n b_n = \underset{+\infty}{o}(c_n d_n)$*.*

Si $a_n \underset{+\infty}{\sim} c_n$ *et si* $b_n \underset{+\infty}{\sim} d_n$*, alors* $a_n b_n \underset{+\infty}{\sim} c_n d_n$*.*

★ Puissance et inverse

Proposition 5. *Si* $p \in \mathbb{N}^*$*, et* $a_n = \underset{+\infty}{o}(b_n)$ *alors* $a_n^p = \underset{+\infty}{o}(b_n^p)$*.*

De même, si $p \in \mathbb{N}$ $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$ *alors* $a_n^p \underset{+\infty}{\sim} b_n^p$*.*

Pour une suite (a_n) *non nulle, telle que* $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$*, on a* $\dfrac{1}{a_n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{b_n}$*, et donc* $\forall p \in \mathbb{Z}$, $a_n^p \underset{+\infty}{\sim} b_n^p$*.*

Tandis que si (a_n) *est non nulle, et vérifie* $a_n = \underset{+\infty}{o}(b_n)$ *on a* $\dfrac{1}{b_n} = \underset{+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{a_n}\right)$*.*

Ainsi, les o passent à la puissance mais pas à l'inverse (ce qui est évident puisque la fonction inverse est décroissante), tandis que les $\sim$ passent à toute puissance (positive ou négative).

★ Valeur absolue et signe

Proposition 6. *Si* $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$*, alors* $|a_n| \underset{+\infty}{\sim} |b_n|$*. La réciproque est fausse comme le montre le cas de* $|(-1)^n| \underset{+\infty}{\sim} 1$*.*

Si $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$*, alors* a_n *et* b_n *ont même signe à partir d'un certain rang, puisque leur quotient tend vers 1.*

Enfin,

$$a_n = \underset{+\infty}{o}(b_n) \Longleftrightarrow |a_n| = \underset{+\infty}{o}(|b_n|),$$

ainsi, dire qu'une suite est négligeable, revient à dire que sa valeur absolue est négligeable.

Contre-exemple :

$$\frac{1}{n^2} = \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right) \text{ ainsi que } -\frac{1}{n^2} = \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right) \text{ et } \frac{(-1)^n}{n^2} = \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Ainsi, on ne peut rien dire des signes pour deux suites négligeables.

★ Lien entre o et $\sim$

Proposition 7. *Si* $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$ *et* $c_n = \underset{+\infty}{o}(b_n)$ *alors* $c_n = \underset{+\infty}{o}(a_n)$*.*

Démonstration. $\frac{c_n}{b_n} = \frac{c_n}{a_n}\frac{a_n}{b_n}$, le premier terme tends vers 0 et le deuxième terme tend vers 1, donc est borné. □

★ Le problème de l'addition

Piège 3 : Attention, ces symboles ne sont pas compatibles avec l'addition.

Contre-exemple : $n^3 + n^2 + 5n + 3 \underset{n+\infty}{\sim} n^3$ et $-n^3 + n^2 + 5n + 3 \underset{n+\infty}{\sim} -n^3 + n^2$ en faisant la somme, on obtiendrait : $2n^2 + 5n + 3 \underset{n+\infty}{\sim} n^2$ ce qui est faux.

On voit où est le problème : lorsqu'on remplace n^3+n^2+5n+3, on néglige les termes en n^2, tandis que si on remplace $-n^3+n^2+5n+3$ par $-n^3+n^2$ on a un ordre de plus, puisqu'on a gardé aussi le terme en n^2, mais on aurait pu mettre n'importe quoi à la place de n^2 : seul le premier terme compte dans l'équivalent. En additionnant, le premier terme disparaît, et donc l'approximation est fausse.

Autre manière de voir : dans l'écriture $u_n \underset{n\infty}{\sim} v_n$, on ne peut pas faire passer des termes de *gauche à droite* du symbole $\sim$. Puisque par exemple : $n^3+n^2+5n+3 \underset{n+\infty}{\sim} n^3+n$ mais n^2+5n+3 n'est pas équivalent à n.

Note: Le problème d'addition avec les équivalents provient souvent du fait qu'un terme disparaît, lorsqu'on ajoute des équivalents à des ordres différents, ce qui n'arrivera pas avec les développements limités.

Contre-exemple : $n = \underset{+\infty}{o}(n^2+1)$, et $n = \underset{+\infty}{o}(-n^2)$, mais on a pas $2n = \underset{+\infty}{o}(1)$. Encore plus grave, on pourrait faire : $n = \underset{+\infty}{o}(n^2)$, et $n = \underset{+\infty}{o}(-n^2)$, et donc $2n = \underset{+\infty}{o}(0)$.

Par contre, on a :

Proposition 8.

$$a_n = \underset{+\infty}{o}(b_n),\ \textit{et}\ c_n = \underset{+\infty}{o}(b_n) \Longrightarrow a_n + c_n = \underset{+\infty}{o}(b_n),$$

et

$$a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n\ \textit{et}\ c_n \underset{+\infty}{\sim} b_n \Longrightarrow a_n + c_n \underset{+\infty}{\sim} 2b_n.$$

Ainsi, on peut ajouter les équivalents « d'un seul côté » du symbole $\sim$.

Démonstration. Pour démontrer il suffit encore de faire le quotient :

– dans le premier cas :

$$\frac{a_n+c_n}{b_n} = \frac{a_n}{b_n} + \frac{c_n}{d_n} \to 0$$

– dans le second cas

$$\frac{a_n+c_n}{2b_n} = \frac{a_n}{b_n}0.5 + \frac{c_n}{d_n}0.5 \to 1$$

□

En conclusion, de ce paragraphe, les $\sim$ et les $\underset{+\infty}{o}$ se comportent mal du point de vue de l'addition. Dans le doute, il ne faut pas hésiter à revenir à la définition et au quotient.

III Utilisation des équivalents pour calculer des limites

L'utilisation principale des équivalents et des o est le calcul des limites, Par exemple, si on veut montrer que $n+1+\frac{1}{n}$ tend vers $+\infty$, on était obligé en classe de terminale, de faire : $n\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$, le terme dans les parenthèse tend vers 1, donc le tout tend vers $+\infty$. Avec les équivalents, il suffit d'écrire directement $n+1+\frac{1}{n} \underset{+\infty}{\sim} n$. Ainsi la convergence est donné par le terme le plus important ici n : on a simplifié l'expression en ne gardant que la partie importante.

Tout cela est résumé dans la proposition suivante :

Proposition 9. *Soit u_n et v_n deux suites telles que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, alors :*

– *Si u_n converge vers une limite l, alors v_n converge aussi vers l.*

– *Si u_n tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$), alors v_n aussi.*

Ainsi, deux suites équivalentes ont la même limite.

Démonstration. La démonstration consiste à regarder le quotient :

$$\text{Si } \lim_{n\infty} u_n = l, \text{alors } |v_n - l| = \underbrace{|u_n|}_{\xrightarrow[n\infty]{} l} \underbrace{\left|\frac{v_n}{u_n} - \frac{l}{u_n}\right|}_{\xrightarrow[n\infty]{} 0} \xrightarrow[n\infty]{} 0,$$

en effet, les deux quantités $\frac{v_n}{u_n}$ et $\frac{l}{u_n}$ tendent vers 1.

La deuxième se démontre (dans le cas de $+\infty$)en remarquant qu'à partir d'un certain rang on a :

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{v_n}{u_n} \leqslant \frac{3}{2},$$

ce qui s'écrit, si $u_n > 0$, comme :

$$\frac{u_n}{2} \leqslant v_n \leqslant \frac{3u_n}{2}.$$

En particulier, si $u_n \to +\infty$, $v_n \to +\infty$. □

IV Équivalent classique

★ Suite polynomiale

Soit une suite polynomiale du type :

$$u_n = a_p n^p, + a_{p-1} n^{p-1} + a_{p-2} n^{p-2} + \ldots a_1 n + a_0, \quad \text{avec } a_p \neq 0,$$

alors $u_n \underset{+\infty}{\sim} a_p n^p$ et $u_n \underset{+\infty}{=} o\,(n^{p+1})$.

Autrement dit, **une suite polynomiale est équivalente à son terme de plus haut degré**.

Ce résultat se généralise au puissance non entière. Par exemple : $n\sqrt{n} \underset{+\infty}{=} o\,(n^2)$.

Ce résultat se généralise aux suites « fraction rationnelle » :

$$u_n = \frac{a_{-p}}{n^p} + \frac{a_{-p-1}}{n^{p-1}} + \ldots \frac{a_{-p-k}}{n^{p-k}} \text{ avec } a_{-p} \neq 0,$$

alors $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{a_{-p}}{n^p}$. Autrement dit, la suite est équivalente à son terme de plus haut degré (ici négatif).

On peut aussi dire qu'un quotient de polynôme est équivalent au quotient des termes de plus haut degré.

D'une manière générale une somme est équivalente au terme qui tend le plus vite vers $+\infty$ (ou le moins vite vers 0). Par exemple :

$$n + e^n + 1 \underset{+\infty}{\sim} e^n \qquad \text{et} \qquad n^2 + n\sqrt{n} + 1 \underset{+\infty}{\sim} n^2$$

En effet, si u_n s'écrit $u_n = v_n + w_n$, avec $w_n = o(v_n)$, alors par définition $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.

★ **Fonctions classiques**

Proposition 10. *Si la suite $u_n \to 0$, on a :*

$$\sin(u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n \qquad \ln(1+u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n \qquad \tan(u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n$$

$$e^{u_n} - 1 \underset{+\infty}{\sim} u_n \qquad \sqrt{1+u_n} - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{u_n}{2} \qquad 1 - \cos(u_n) \underset{+\infty}{\sim} \frac{u_n^2}{2}$$

$$\arcsin(u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n \qquad \arctan(u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n$$

Démonstration. C'est une traduction des limites usuelles. Par exemple : $\lim_{n\infty} \dfrac{\sin(u_n)}{u_n} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

□

Note: Attention, ceci n'est valable que parce que $u_n \to 0$! !

Piège 4 : Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, on a pas en général $f(u_n) \underset{+\infty}{\sim} f(v_n)$, on **ne compose donc pas les équivalents**. Il faut toujours revenir au quotient.

Contre-exemple : $\frac{1}{n} \underset{n+\infty}{\sim} 1$, mais on n'a pas $\ln(1+\frac{1}{n}) \underset{n+\infty}{\sim} \ln(1) = 0$, au contraire $\ln(1+\frac{1}{n}) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

V Fonctions équivalentes, comparaison de fonctions

On reprend ce qu'on a fait pour les suites avec les fonctions.

Comme pour les limites de fonctions, on considère des fonctions définies sur un domaine D de $\mathbb{R}$.

Lorsqu'on parle d'équivalent en $+\infty$ (resp.$-\infty$), on supposera que D contient un intervalle du type $[A, +\infty[$ (resp. $]-\infty, A]$). Lorsqu'on regarde en x_0, on supposera que D contient un intervalle du type :

- $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$,
- $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\setminus \{x_0\}$,
- $]x_0 - \alpha, x_0[$, ou $]x_0, x_0 + \alpha[$, on peut alors éventuellement parler d'équivalent à gauche et à droite.

V.1 Définitions et exemples

Définition 2. *Soit f et g, on dit que f est **négligeable devant** g, ou que g est **prépondérante** sur f, en x_0, si il existe un fonction ϵ, qui vérifie*

$$\text{pour tout } x \text{ au voisinage de } x_0,\ f(x) = g(x)\epsilon(x), \text{ et } \lim_{x\to x_0} \epsilon(x) = 0.$$

On note alors $f(x) \underset{x_0}{=} o(g)$.

L'expression « au voisinage de x_0 » signifie précisément

- *Si $x_0 \in \mathbb{R}$: $\exists \alpha > 0$, tel que l'égalité ait lieu sur l'intervalle $D \cap]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$.*
- *Si $x_0 = +\infty$: $\exists A \in \mathbb{R}$, tel que l'égalité ait lieu sur l'intervalle $D \cap [A, +\infty[$.*
- *Si $x_0 = -\infty$: $\exists A \in \mathbb{R}$, tel que l'égalité ait lieu sur l'intervalle $D \cap]-\infty, A]$.*

D'après les hypothèses, ces intervalles sont donc non vides.

Si g ne s'annule pas (cadre du programme), cela équivaut à $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

*On dit que f et g sont **équivalente au point** x_0, si $f - g \underset{x_0}{=} o(g)$,* i.e. *si il existe $\epsilon(x)$ tel que : $f(x) = g(x) + \epsilon(x)g(x)$ (au voisinage de x_0), avec $\lim_{x_0} \epsilon(x) = 0$. On note alors $f \underset{x_0}{\sim} g$.*

Si g ne s'annule pas, cela équivaut à $\lim_{x_0} \frac{f}{g} = 1$.

La « *vraie définition* » sert à gérer le cas de l'équivalent d'une fonction qui s'annule une infinité de fois, comme la fonction $x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$. Dans le cadre du programme, c'est la définition avec le rapport qui est toujours utilisé en pratique.

Exemple: Voici les équivalent usuels en 0 :

$$\begin{array}{ccc} \sin(x) \underset{0}{\sim} x, & e^x - 1 \underset{0}{\sim} x, & \tan x \underset{0}{\sim} x, \\ \ln(1+x) \underset{0}{\sim} x, & \sqrt{1+x} - 1 \underset{0}{\sim} \frac{x}{2}, & 1 - \cos(x) \sim_0 \frac{x^2}{2}. \end{array}$$

Les croissances comparées :

$$\ln(x) \underset{+\infty}{=} o(x), \text{ et même } \forall \beta > 0,\ \ln(x) \underset{+\infty}{=} o(x^\beta) \qquad x \underset{+\infty}{=} o(e^x) \text{ et même } \forall \beta > 0,\ x^\beta \underset{+\infty}{=} o(e^x)$$

D'autres exemples :

$$\sin x \underset{0}{=} o(\sqrt{x}) \qquad \ln(x) \underset{1}{\sim} x - 1, \qquad x^2 + 5x + 3 \underset{+\infty}{\sim} x^2 \underset{+\infty}{\sim} x^2 + 3x,$$

Le dernière écriture peut se généraliser, puisqu'on voit que si $h = o(g)$ et $f \sim g$ alors $f \sim g + h$. On peut donc **toujours ajouter à un équivalent une quantité négligeable devant cet équivalent** (seul le premier terme compte). On cherchera donc toujours l'équivalent le plus simple, c'est-à-dire celui qui donne le plus d'information.

Souvent on écrit : $f(x) = g(x) + o(h(x))$, pour dire $f(x) - g(x) = o(h(x))$. Cette écriture signifie : f est environ égal à g à h près.

Exemple: Pour les fonctions usuelles

$$\sin(x) \underset{0}{=} x + o(x), \qquad e^x \underset{0}{=} 1 + x + o(x), \qquad \ln(1+x) \underset{0}{=} x + o(x), \qquad \sqrt{1+x} \underset{0}{=} 1 + \frac{x}{2} + o(x),$$

$$\tan(x) \underset{0}{=} x + o(x), \qquad \cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Exemple: Pour un polynôme

$$P(x) = a_m x^m + a_{m+1} x^{m+1} + \cdots + a_n x^n,$$

avec $m < n$, on a $P(x) \underset{0}{\sim} a_m x^m$ et $P(x) \underset{\infty}{\sim} a_n x^n$.

Autrement dit, **un polynôme est équivalent en** 0 **à son terme de plus bas degré en l'infini à son terme de plus haut degré**.

Comme pour les suites, l'intérêt est de calculer des limites, en utilisant le résultat :

$$\left.\begin{array}{r} f \underset{x_0}{\sim} g \\ \lim_{x_0} g = L \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{a} f = L$$

V.2 Manipulation

On a les mêmes propriétés que pour les suites :

Lien avec les limites Si $L \neq 0$, $f \underset{x_0}{\sim} L \Longleftrightarrow \lim_{x_0} f = L$.

Si $\lim_{x_0} f = 0 \Longleftrightarrow f \underset{x_0}{=} o(1)$.

Transitivité Si $f \underset{x_0}{=} o(g)$ et si $g \underset{x_0}{=} o(h)$ alors $f \underset{x_0}{=} o(h)$.

Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et si $g \underset{x_0}{\sim} h$ alors $f \underset{x_0}{\sim} h$.

Multiplication par un scalaire non nul Soit $\lambda \neq 0$, et $f = \underset{x_0}{o}(g)$, on a $f = \underset{x_0}{o}(\lambda g)$, et $\lambda f = \underset{x_0}{o}(g)$.

Soit $\lambda \neq 0$, et $f \sim g$, on a $\lambda f \sim \lambda g$.

Compatibilité avec la multiplication Si $f = \underset{x_0}{o}(g)$ et si $f' = \underset{x_0}{o}(g')$, alors $fg = \underset{x_0}{o}(gg')$.

Si $f \sim g$ et si $f' \sim g'$, alors $ff' \sim gg'$.

Puissance et inverse Si $p \in \mathbb{N}^*$, on a $f = \underset{x_0}{o}(g) \Rightarrow f^p = \underset{x_0}{o}(g^p)$. Par contre, $f = \underset{x_0}{o}(g) \not\Rightarrow \frac{1}{f} = \underset{x_0}{o}(\frac{1}{g})$.

Si $p \in \mathbb{N}^*$, on a $f \sim g \Rightarrow f^p \sim g^p$.

Si $f \sim g \Rightarrow \frac{1}{f} \sim \frac{1}{g}$. En conséquence, $\forall p \in \mathbb{Z}$, $f \sim g \Rightarrow f^p \sim g^p$.

Si les deux fonctions sont strictement positive, et $a \in \mathbb{R}$, on a alors $f \sim g \Rightarrow f^a \sim g^a$. Attention, il ne faut pas que a dépende de x.

Valeur absolue et signe Si $f \sim g$, alors $|f| \sim |g|$, mais la réciproque est fausse.

Par contre, $f = \underset{x_0}{o}(g) \Leftrightarrow |f| = \underset{x_0}{o}(|g|)$.

Si $f \sim g$, alors f et g sont du même signe au voisnage de x_0.

Si $f = \underset{x_0}{o}(g)$, on ne peut rien dire sur leurs signes.

Lien équivalent /négligeable Si $f = \underset{x_0}{o}(g)$ et si $g \sim h$, alors $f = \underset{x_0}{o}(h)$. En conséquence dans l'écriture $f = \underset{x_0}{o}(g)$, on peut remplacer g par une fonction équivalente.

Le problème de l'addition Comme pour les suites, **on ne peut pas ajouter des équivalents**.

Contre exemple : $x^2 + x + 1 \sim_{+\infty} x^2$ et $-x^2 \sim_{+\infty} -x^2 + 2$, mais $x + 1 \not\sim_{+\infty} -2$. Autre contre-exemple (en 0) : $3x^3 + 2x^2 \sim_0 2x^2$, $-2x^2 \sim_0 -2x^2 - 4x^4$, mais on n'a pas : $3x^3 \sim_0 -4x^4$.

Même chose avec les o (en $+\infty$) : $x =_{+\infty} o(x^2)$ et $x =_{+\infty} o(1 - x^2)$, mais $2x \neq o(1)$.

Combinaison linéaire Par contre, si $f_1 = o(g)$ et $f_2 = o(g)$, alors $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}^2$, $\lambda f_1 + \mu f_2 = o(g)$. Ainsi une **combinaison linéaire de fonctions négligeables** devant g est négligeables devant g.

Démonstration. La preuve est simple : $\frac{\lambda f_1 + \mu f_2}{g} = \lambda \frac{f_1}{g} + \mu \frac{f_2}{g} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$. □

Le problème de la composition On ne compose pas non plus les équivalents de fonctions :

Contre exemple : $x + 1 \sim x$, mais e^x n'est pas équivalent à e^{x+1}, puisque le rapport tends vers e.

Substitution Par contre, on a la **substitution :**

Proposition 11. *Si* $\lim_{t_0} u(t) = a$ *et si* $f \sim_a g$ *alors* $f(u(t)) \sim_{t \to t_0} g(u(t))$. *De même, si* $\lim_{t_0} u(t) = a$ *et si* $f =_a o(g)$ *alors* $f(u(t)) =_{t_0} o(g(u(t)))$.

Démonstration. La démonstration se fait en calculant la limite du quotient, et en utilisant le théorème de composition des limites :

$$\lim_{t\to t_0} \frac{f(u(t))}{g(u(t)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

□

Remarque:

– Attention à ne pas confondre substitution et composée, et à **bien le faire apparaître dans la rédaction**.
  Par exemple, la rédaction : $\ln(1+x) \sim_0 x$ et $\sin t \sim_0 t$ donc $\ln(1+\sin(t)) \sim_0 t$ est fausse (même si le résultat est juste). La rédaction correcte est : $\lim_{x\to 0} \sin t = 0$, et $\ln(1+u) \sim_0 u$, donc $\ln(1+\sin(t)) \sim_0 \sin(t) \sim_0 t$.
– On peut aussi faire une substitution par une suite :
  Proposition 12. *Si $u_n \to a$ et $f \sim_a g$, alors $f(u_n) \sim_{n\to+\infty} g(u_n)$. et de même si $f =_a o(g)$, alors $f(u_n) = o(g(u_n))$.*

Application 1 Donner une équivalent simple de $\sin \dfrac{n+1}{n^2+1}$.

Application 2 Donner des équivalents au point entre paranthèse de :

$$\ln(1+t^2)\ (0), \qquad 1-\cos(t^3)\ (0), \qquad \tan(\frac{1}{t})\ (+\infty), \qquad e^{\frac{1}{t}}-1\ (-\infty)$$

Application 3 Montrer que :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(1-\cos(x))}{x} = 0, \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} x\ln(e^x+1) = 0$$

Feuille d'exercices Suites équivalentes

BCPST Lycée Hoche Pelletier Sylvain

Exercice 1 Donner un équivalent simple et la limite éventuelle des suites (u_n) définies par :

$$u_n = n^2 + 2n, \qquad u_n = \sqrt{n} + (\ln(n))^{12} + \sin(n), \qquad u_n = e^n + n^e,$$

$$u_n = \sqrt{n+1} + \sqrt{n}, \qquad u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \qquad u_n = \sin\left(\frac{n+1}{n^2}\right),$$

$$u_n = \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{e^{\frac{1}{n}} - 1}, \qquad u_n = \frac{\left(1 - \cos(\frac{1}{n})\right)\cos(\frac{1}{n})}{e^{\frac{1}{n^2}} - 1}.$$

Exercice 2 Soit x un réel. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{ix}{n}\right)^n$.

Exercice 3

1. Trouver un équivalent de $\sqrt{n^2+n} + \sqrt[3]{n^3+n^2}$.
2. Déterminer la limite de $u_n = \dfrac{n^5 + 10n}{\sqrt[5]{n^2+n+1}}$.

Exercice 4 Soient (a_n), (b_n), (c_n) et (d_n) quatre suites.

1. On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$, tel que $a_n \sim b_n$ et $c_n \sim \lambda b_n$. Montrer que $a_n + c_n \sim (1+\lambda)b_n$.
2. Monter que si les quatre suites sont à valeurs strictement positives et si $a_n \sim b_n$ et $c_n \sim d_n$, alors $a_n + c_n \sim b_n + d_n$.

Feuille d'exercices Suites équivalentes 2

BCPST Lycée Hoche Pelletier Sylvain

Exercice 1 Déterminer un équivalent de la suite définie par :

$$u_n = \sin\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right).$$

Exercice 2

1. Déterminer la limite de la suite définie par : $v_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$, puis chercher un équivalent de $v_n - l$.
2. Même question avec $v_n = \left(1 + \frac{1}{n^4}\right)^{n^2}$.
3. Laquelle de ces deux suites converge le plus rapidement ?

Exercice 3 Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0,1[$ fixés.

1. Montrer que $\binom{n}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$.
2. En déduire $\lim_{n\to+\infty} \binom{n}{k} x^n = 0$.

Exercice 4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que l'équation $\tan x = x$ admet une unique solution dans l'intervalle
$$I_n = \left]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[.$$
On note cette solution x_n.
2. Montrer que $x_n \sim_{n\to+\infty} n\pi$,
3. Montrer que $x_n = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x_n}\right) + n\pi$.
4. En déduire $\left(x_n - \frac{\pi}{2} - n\pi\right) \sim -\frac{1}{n\pi}$,

Feuille d'exercices Fonctions équivalentes

BCPST Lycée Hoche Pelletier Sylvain

Exercice 1 Soit x_0 un réel ou $\pm\infty$. Montrer que si f est bornée au voisinage de x_0, et si $\lim_{x_0} g = +\infty$, alors $f \underset{x_0}{=} o\,(g)$.

Exercice 2 Pour une fonction f définie au point $a \in \mathbb{R}$, montrer que

- f est continue en $a \Leftrightarrow f(x) \underset{a}{=} f(a) + o(1)$,
- f est dérivable en a, avec $f'(a) = d \Leftrightarrow f(x) \underset{a}{=} f(a) + d(x-a) + o((x-a))$.

Exercice 3 Soit $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la partie entière de x, donner un équivalent simple de cette fonction en $+\infty$.

Exercice 4 Donner la limite d'expressions suivantes à l'aide d'équivalents :

$$\lim_0 \frac{1-\cos(x)}{\tan 2x}, \qquad \lim_0 \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}, \qquad \lim_0 \sin(x)\ln(\tan x),$$

$$\lim_1 \ln(1-x)\cos\frac{\pi x}{2}, \qquad \lim_0 \frac{(1-\cos x)\tan x}{x\sin^2 x}, \qquad \lim_1 \tan\left(\frac{x\pi}{2}\right)\ln(x),$$

$$\lim_0 (\cos x)^{\cot x^2}, \quad \text{avec : } \cot(u) = \frac{\cos u}{\sin u}$$

Exercice 5 Déterminer un équivalent de la fonction f donnée, au point indiqué entre crochets :

$$f(x) = \frac{\ln(1+x^a)}{\ln x}\ [+\infty], a > 0, \qquad f(x) = \tan(x)\ [\frac{\pi}{2}], \qquad f(x) = \frac{\sqrt{\sin x}}{e^x - 1}\ [0],$$

$$f(x) = \frac{\ln(2x^2+x+1)}{\ln(2x+3)}\ [+\infty], \qquad f(x) = (x^3+x)^{\frac{1}{3}} - (x^3-x)^{\frac{1}{3}}\ [+\infty],$$

$$f(x) = x\ln(1+x) - (x+1)\ln(x)\ [+\infty], \qquad f(x) = E(x)\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\ [+\infty],$$

$$f(x) = \ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}\right)\ [+\infty], \qquad f(x) = e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\ [+\infty],$$

$$f(x) = \frac{x^x - 1}{\ln(1-\sqrt{x^2-1})}\ [1^+], \qquad f(x) = \frac{e^{\sqrt{1+\sin x}} - e}{\tan x}\ [0],$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\ [1], \qquad f(x) = \frac{\ln(1-x^2)}{1-\ln(x^2)}\ [0]$$