COURS (Chapitre : LES MATRICES)

I DÉFINITIONS

1 MATRICE

On appelle matrice de dimension $m \times n$ (ou d'ordre $m \times n$) un tableau de m lignes et n colonnes de nombres réels.
On note $a_{i,j}$ l'élément de la matrice situé à l'intersection de la i-ième ligne et de la j-ième colonne.

Une matrice A est représentée entre deux parenthèses ou deux crochets

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,j} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \text{ ou } A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,j} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

EXEMPLE

La matrice $P = \begin{pmatrix} 60 & 50 & 0 \\ 70 & 90 & 120 \end{pmatrix}$ est une matrice d'ordre 2×3, le coefficient $a_{2,3}$ de la matrice P est $a_{2,3} = 120$.

2 CAS PARTICULIERS

MATRICE CARRÉE

Une matrice ayant le même nombre n de lignes et de colonnes est une matrice carrée d'ordre n.

EXEMPLE

La matrice $M = \begin{pmatrix} -12 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée de dimension 3.

VECTEUR LIGNE

Une matrice formée d'une seule ligne et de n colonnes est une matrice ligne ou vecteur ligne.

EXEMPLE

La matrice $A = \begin{pmatrix} 60 & 50 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice ligne de dimension 1×3.

VECTEUR COLONNE

Une matrice formée de m lignes et d'une seule colonne est une matrice colonne ou vecteur colonne.

EXEMPLE

La matrice $C = \begin{pmatrix} 25 \\ 28 \\ 30 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne de dimension 3×1.

3 ÉGALITÉ DE DEUX MATRICES

Deux matrices A et B sont égales si, et seulement si, elles ont même dimension et que tous leurs éléments situés à la même place sont égaux.

EXEMPLE

Dire que les matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 2-a & -3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & b+2 \end{pmatrix}$ sont égales signifie que

$$\begin{cases} 2-a=1 \\ b+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases}$$

II MATRICES ET OPÉRATIONS

1 TRANSPOSÉE D'UNE MATRICE

La transposée ${}^tA$ (aussi notée A^T) d'une matrice A de dimension $m \times n$ est la matrice de dimension $n \times m$ obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A.

EXEMPLE

La transposée de la matrice $P = \begin{pmatrix} 60 & 50 & 0 \\ 70 & 90 & 120 \end{pmatrix}$ de dimension 2×3 est la matrice ${}^tP = \begin{pmatrix} 60 & 70 \\ 50 & 90 \\ 0 & 120 \end{pmatrix}$ de dimension 3×2.

2 ADDITION DE MATRICES

La somme de deux matrices A et B de **même dimension** est la matrice notée $A+B$ obtenue en ajoutant les éléments de A et ceux de B situés à la même place.
Si $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ sont deux matrices d'ordre $m \times n$ alors

$$A+B = (a_{i,j}+b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$$

EXEMPLE

Soient les matrices $P_0 = \begin{pmatrix} 50 & 40 & 0 \\ 70 & 90 & 120 \end{pmatrix}$ et $P_1 = \begin{pmatrix} 60 & 50 & 0 \\ 70 & 90 & 120 \end{pmatrix}$:

$$P_0+P_1 = \begin{pmatrix} 50+60 & 40+50 & 0+0 \\ 70+70 & 90+90 & 120+120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 & 90 & 0 \\ 140 & 180 & 240 \end{pmatrix}$$

PROPRIÉTÉS

Si A, B et C sont des matrices de même dimension alors :
- $A+B = B+A$.
- $A+(B+C) = (A+B)+C$

3 MULTIPLICATION PAR UN RÉEL

Le produit d'une matrice A par un réel k est la matrice kA obtenue en multipliant chaque élément de A par le réel k.
Si $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ est une matrice d'ordre $m \times n$ alors pour tout réel k

$$kA = (ka_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$$

EXEMPLE

Si $P = \begin{pmatrix} 60 & 50 & 0 \\ 70 & 90 & 120 \end{pmatrix}$ alors :

$$1{,}1 \times P = \begin{pmatrix} 1{,}1\times 60 & 1{,}1\times 50 & 1{,}1\times 0 \\ 1{,}1\times 70 & 1{,}1\times 90 & 1{,}1\times 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66 & 55 & 0 \\ 77 & 99 & 132 \end{pmatrix}$$

PROPRIÉTÉ

Soient A et B deux matrices de même dimension et k un réel on a :

$$k(A+B) = kA+kB$$

4 PRODUIT DE MATRICES

MULTIPLICATION D'UNE MATRICE LIGNE PAR UNE MATRICE COLONNE

Soient A une matrice ligne de dimension $1 \times n$ et B une matrice colonne de dimension $n \times 1$.
Le produit $A \times B$ de ces deux matrices est :

$$\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_i & \cdots & a_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (a_1 \times b_1 + \cdots + a_i \times b_i + \cdots + a_n \times b_n)$$

Le produit $A \times B$ de ces deux matrices est la matrice de dimension 1×1 qui n'a qu'un seul élément.

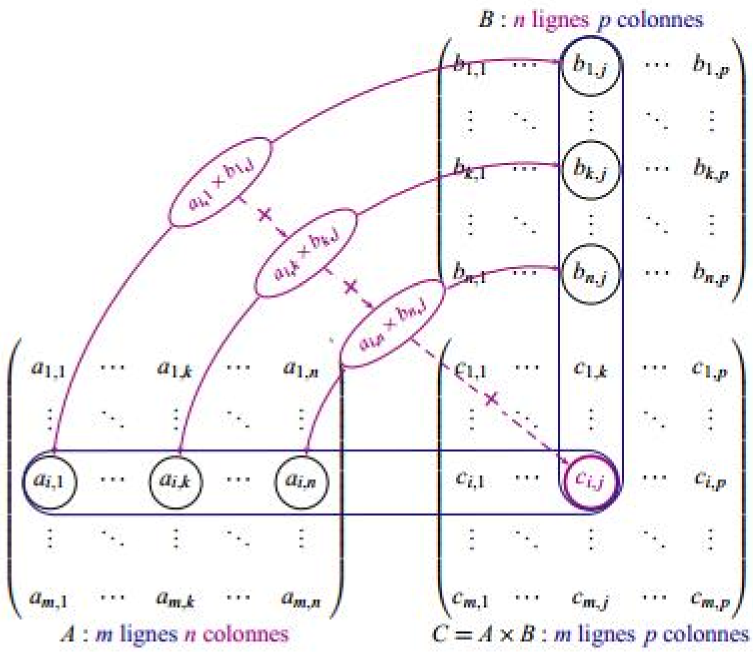
EXEMPLE

$$\begin{pmatrix} 60 & 50 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 25 \\ 28 \\ 30 \end{pmatrix} = (60 \times 25 + 50 \times 28 + 0 \times 30) = (2900)$$

PRODUIT DE DEUX MATRICES

Si $A = (a_{i,k})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant k \leqslant n}}$ est une matrice de dimension $m \times n$ et si $B = (b_{k,j})_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ est une matrice de dimension $n \times p$,
le produit $C = A \times B = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \times b_{k,j} \right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ est une matrice de dimension $m \times p$.
Chaque élément $c_{i,j}$ de la matrice C est le produit de la matrice constituée de la i-ième ligne de la matrice A par la matrice constituée de la j-ième colonne de la matrice B ($1 \leqslant i \leqslant m$ et $1 \leqslant j \leqslant p$).

En pratique, il est commode de disposer les deux matrices de la façon suivante pour effectuer le produit :



EXEMPLE

Soient les deux matrices $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 60 & 50 & 0 \\ 70 & 90 & 120 \end{pmatrix}$

La matrice A est d'ordre 2×2 et la matrice B est d'ordre 2×3. Le produit $C = A \times B$ est une matrice d'ordre 2×3 :

- L'élément $c_{1,1}$ de la matrice C s'obtient en effectuant le produit $\begin{bmatrix} 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 60 \\ 70 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2 \times 60 + 0,4 \times 70 \end{bmatrix}$
- L'élément $c_{1,2}$ de la matrice C s'obtient en effectuant le produit $\begin{bmatrix} 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 50 \\ 90 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2 \times 50 + 0,4 \times 90 \end{bmatrix}$
- L'élément $c_{1,3}$ de la matrice C s'obtient en effectuant le produit $\begin{bmatrix} 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 120 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2 \times 0 + 0,4 \times 120 \end{bmatrix}$
- L'élément $c_{2,1}$ de la matrice C s'obtient en effectuant le produit $\begin{bmatrix} 0,8 & 0,6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 60 \\ 70 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 \times 60 + 0,6 \times 70 \end{bmatrix}$
- L'élément $c_{2,2}$ de la matrice C s'obtient en effectuant le produit $\begin{bmatrix} 0,8 & 0,6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 50 \\ 90 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 \times 50 + 0,6 \times 90 \end{bmatrix}$
- L'élément $c_{2,3}$ de la matrice C s'obtient en effectuant le produit $\begin{bmatrix} 0,8 & 0,6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 120 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 \times 0 + 0,6 \times 120 \end{bmatrix}$

Soit en définitive :

$$C = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 60 & 50 & 0 \\ 70 & 90 & 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & 46 & 48 \\ 90 & 94 & 72 \end{pmatrix}$$

REMARQUE

Le nombre de colonnes de la matrice B est différent du nombre de lignes de la matrice A donc le produit $B \times A$ n'est pas défini !

5 PROPRIÉTÉS

Soients A, B et C trois matrices telles que les sommes et les produits ci-dessous sont définis :
- $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$.
- $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$.
- $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$.

REMARQUES

- En général $A \times B \neq B \times A$ il faut faire attention à l'ordre dans lequel on effectue les calculs.

  EXEMPLE

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

- $A \times C = B \times C$ ne signifie pas que $A = B$.

  EXEMPLE

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- $A \times B = 0$ ne signifie pas que $A = 0$ ou $B = 0$.

  EXEMPLE

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -6 & 3 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -3 \\ 5 & -6 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

III MATRICES CARRÉES

1 MATRICE IDENTITÉ

MATRICE DIAGONALE

Une matrice carrée dont tous les coefficients sont nuls, sauf éventuellement les coefficients de la diagonale, est appelée matrice diagonale.

EXEMPLES

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale. La matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas une matrice diagonale.

DÉFINITION

La matrice diagonale d'ordre n dont tous les coefficients sur la diagonale sont égaux à 1 est appelée matrice identité d'ordre n, on la note I_n.

EXEMPLES

$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

PROPRIÉTÉ

Soit A une matrice carrée d'ordre n alors $A \times I_n = I_n \times A = A$, où I_n est la matrice identité d'ordre n.

EXEMPLE

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

2 PUISSANCES D'UNE MATRICE CARRÉ

Soit A une matrice carré d'ordre n et p un entier supérieur ou égal à 1.
La puissance p-ième de la matrice A est la matrice carrée d'ordre n obtenue en effectuant le produit de p matrices égales à A.

$$A^p = \underbrace{A \times A \times \cdot \times A}_{p \text{ fois}}$$

Par convention $A^0 = I_n$.

EXEMPLE

Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$:

$$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 2 \\ 14 & -8 & 2 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 2 \\ 14 & -8 & 2 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

<u>Exercice</u> : Calculer pour tout entier $n \geq 3$ la matrice $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{n}}$ *en fonction de* n

3 INVERSE D'UNE MATRICE CARRÉE

DÉFINITION

Une matrice carrée A d'ordre n est inversible, s'il existe une matrice carrée B d'ordre n telle que $A \times B = B \times A = I_n$, où I_n est la matrice identité d'ordre n.
La matrice inverse de A si elle existe, est unique et est notée A^{-1}

EXEMPLE

La matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ est elle inversible ?

Calculons a, b, c et d tel que $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. a, b, c et d sont les solutions éventuelles du système :

$$\begin{cases} 4a-2c=1 \\ 4b-2d=0 \\ -3a+c=0 \\ -3b+d=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-c=\frac{1}{2} \\ -3a+c=0 \\ 2b-d=0 \\ -3b+d=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{2} \\ b=-1 \\ c=-\frac{3}{2} \\ d=-2 \end{cases}$$

L'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix}$

4 APPLICATION AUX SYSTÈMES LINÉAIRES

Un système linéaire à n équations et n inconnues : $\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$

peut s'écrire sous la forme matricielle $AX = B$ où $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre n,

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ sont des matrices colonnes de dimension $n \times 1$.

Si la matrice A est inversible, alors le système admet une unique solution donnée par $X = A^{-1}B$.

EXEMPLE

Soit le système $\begin{cases} x-3y+z=6 \\ 2x-y+3z=-2 \\ -4x+3y-6z=1 \end{cases}$.

Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -4 & 3 & -6 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Alors le système peut s'écrire sous la forme matricielle $AX = B$

La matrice A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 15 & 8 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & -9 & -5 \end{pmatrix}$ on en déduit que

$$AX = B \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$$

Soit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 15 & 8 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & -9 & -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On obtient ainsi, l'unique solution du système $x = -4$; $y = -3$ et $z = 1$.

5 COMPLÉMENTS

Les deux méthodes suivantes sont hors programme et données à titre indicatif

RÉSOLUTION DE SYSTÈMES LINÉAIRES À L'AIDE DE LA MATRICE AUGMENTÉE

La méthode de base pour résoudre un système d'équations linéaires est de remplacer le système par un autre, plus simple, ayant le même ensemble de solutions.
Ceci se fait par une succession d'opérations, appelées opérations élémentaires :
- multiplier une équation par un réel non nul ;
- permuter deux équations ;
- ajouter un multiple d'une équation à une autre équation.

Soit un système linéaire à n équations et n inconnues : $\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$

La matrice augmentée associée au système est la matrice $(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} & b_n \end{array}\right)$

Les opérations élémentaires appliquées à un système d'équations linéaires correspondent à des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice augmentée. Ces opérations sont les suivantes :
- multiplier une ligne par un réel non nul ;
- permuter deux lignes ;
- ajouter un multiple d'une ligne à une autre ligne.