

Etude des suites homographiques « convergentes » (extrait du cours)

Une suite homographique est une suite définie par la donnée de u_0 et une relation du type :

$$u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}$$

ou a, b, c, d sont des réels (on peut prendre des nombres complexes aussi) tels que $ad - bc \neq 0$

(sinon le rapport numérateur/dénominateur est constant ou non défini) et $c \neq 0$.

Ce type de suite n'est définie que si tout terme u_n de cette suite est différent de $-d/c$.

Etude de ce type de suite :

supposons que cette suite converge vers r , alors r vérifie $r(cr + d) = ar + b$ donc r est solution de l'équation du second degré :

$$cr^2 + (d - a)r - b = 0$$

- Premier cas, l'équation a deux racines distinctes

α et β

si $u_0 = \alpha$ (ou $u_0 = \beta$) alors la suite est stationnaire ou constante)

sinon on pose :

$$v_n = \frac{u_n - \beta}{u_n - \alpha}$$

qui est une suite géométrique de raison

$$q = \frac{c\alpha + d}{c\beta + d}$$

si $|q| < 1$ alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente de limite β

si $|q| > 1$ alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente de limite α

si $q = 1$ ou $q = -1$ alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente (qui tend vers infini)

- Deuxième cas, l'équation a une racine double α

si $u_0 = \alpha$ alors la suite est stationnaire ou constante sinon on pose (à condition que les

termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soient tous différents de α) :

$$v_n = \frac{1}{u_n - \alpha}$$

qui est une suite arithmétique de raison non nulle q

et dans ce cas la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente de limite α car :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - \alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{v_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{v_0 + nq} = 0$$

EXEMPLE n° 1 : Etude de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_{n+1} = \frac{u_n}{2-u_n}$ avec $u_0 = \frac{2}{3}$

Exemple 1 : (u_n) est définie par : $u_0 = \frac{2}{3}$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{2-u_n}$

On admettra que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n \neq 0$ et $u_n \neq 2$.

En utilisant (t_n) telle que : $t_n = \frac{u_n-1}{u_n}$ déterminer u_n en fonction de n .

Il s'agit tout d'abord de déterminer la nature exacte de (t_n) et, pour cela, d'établir une relation de récurrence entre t_{n+1} et t_n

$$t_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}} = \frac{\frac{u_n}{2-u_n}-1}{\frac{u_n}{2-u_n}} = \frac{u_n-(2-u_n)}{u_n} = \frac{2u_n-2}{u_n} = 2 t_n$$

(t_n) est donc géométrique, de raison 2 et de terme initial

$$t_0 = \frac{u_0-1}{u_0} = \frac{\frac{2}{3}-1}{\frac{2}{3}} = \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = -\frac{1}{2}$$

Nous savons donc que $t_n = -\frac{1}{2} 2^n = -\frac{1}{2^{n-1}}$

Pour déterminer u_n il est préférable de chercher à exprimer u_n à l'aide de t_n .

$$t_n = \frac{u_n-1}{u_n} \text{ donc } t_n u_n = u_n - 1 \text{ puis } 1 = u_n - t_n u_n$$

c'est-à-dire : $1 = u_n (1 - t_n)$

$$u_n = \frac{1}{1-t_n}$$

Il suffit alors de remplacer t_n par son expression pour avoir u_n .

$$u_n = \frac{1}{1-\frac{-1}{2^{n-1}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{2^{n-1}}}$$

Remarque : en dépit de la lourdeur apparente de l'expression, c'est à partir de cette forme qu'il est le plus simple d'obtenir la limite de (u_n) (qui est 1 bien sûr) !

D'où vient la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $t_n = \frac{u_n-1}{u_n}$ qui est suggérée dans l'énoncé de l'exercice ?

Etude des points fixes de la fonction définie par $f(x) = \frac{x}{2-x}$

$\forall x \neq 2$ résolvons l'équation $f(x) = x$

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{x}{2-x} = x \Leftrightarrow x = x(2-x) \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1$$

Donc 2 points fixes et d'après le cours en posant $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 1 \end{cases}$

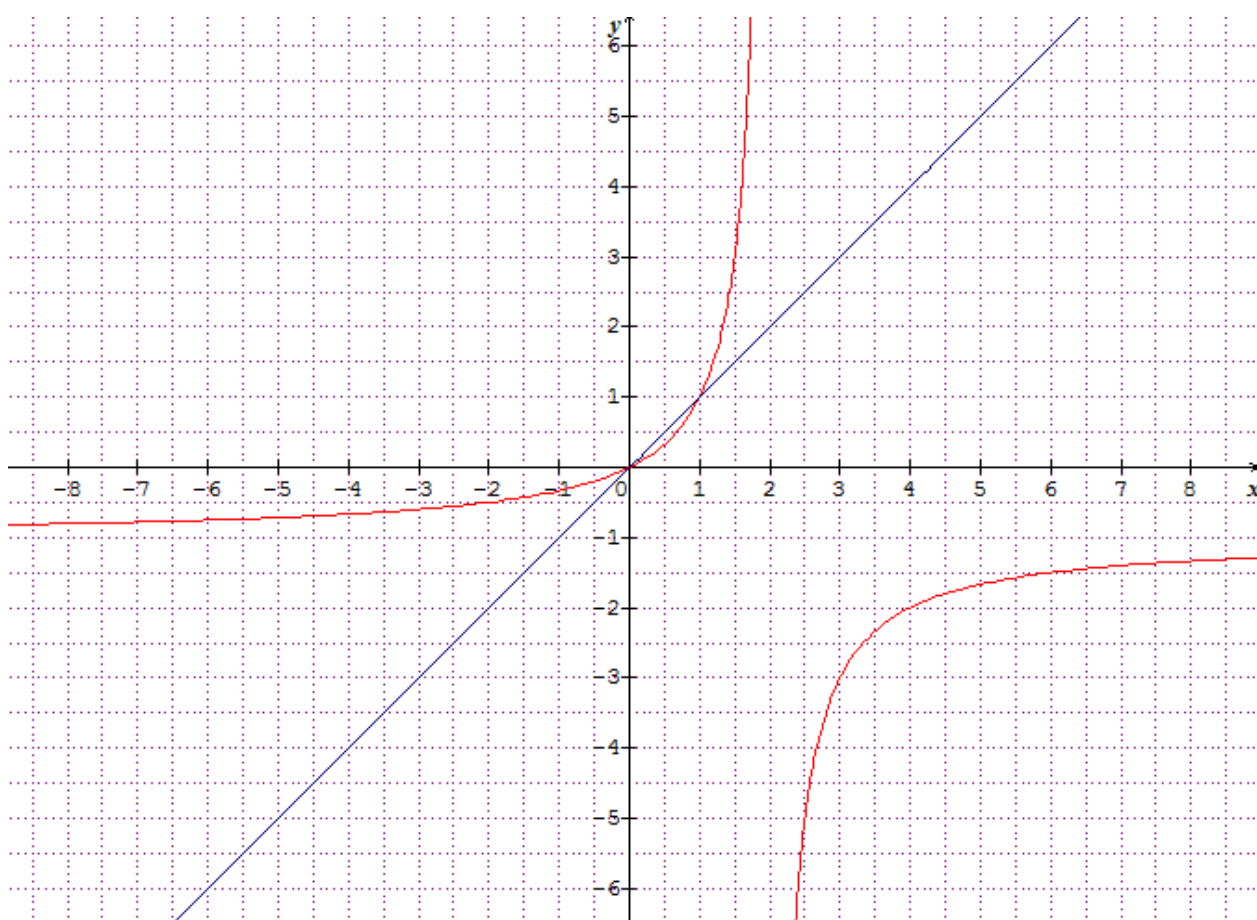
La suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $t_n = \frac{u_n-\beta}{u_n-\alpha}$ c'est-à-dire $t_n = \frac{u_n-1}{u_n}$ est une suite géométrique et on

peut « facilement » calculer la raison et on trouve que $q = 2$ avec $t_0 = -\frac{1}{2}$

Et on peut calculer de façon explicite (en fonction du paramètre n) le terme t_n puis le terme u_n

Et on peut montrer que $u_n = \frac{1}{1-t_n} = \frac{1}{1-\frac{-1}{2^{n-1}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{2^{n-1}}}$ **et donc que** $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

Représentation graphique de la fonction f définie par $f(x) = \frac{x}{2-x}$



EXEMPLE n° 2 : Etude de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_{n+1} = \frac{u_n - 4}{u_n - 3}$ avec $u_0 = 1$

Exemple 2 : $u_{n+1} = \frac{u_n - 4}{u_n - 3}$ et $u_0 = 1$

On utilise, cette fois, la suite (v_n) telle que $v_n = \frac{1}{u_n - 2}$ et on se propose de montrer tout d'abord que (v_n) est arithmétique pour en déduire ensuite u_n .

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1} - 2} - \frac{1}{u_n - 2} = \frac{1}{\frac{u_n - 4}{u_n - 3} - 2} - \frac{1}{u_n - 2} = \frac{u_n - 3}{u_n - 4 - 2(u_n - 3)} - \frac{1}{u_n - 2}$$

et donc :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n - 3}{-u_n + 2} - \frac{1}{u_n - 2} = \frac{u_n - 2}{-u_n + 2} = -1$$

(v_n) est bien arithmétique de raison -1 et de terme initial $v_0 = -1$.

Nous avons donc $v_n = -(n+1)$

Revenons à u_n

$$v_n = \frac{1}{u_n - 2} \text{ donc } \frac{1}{v_n} = u_n - 2$$

$$\text{Par conséquent : } u_n = 2 + \frac{1}{v_n} = 2 - \frac{1}{n+1}$$

D'où vient la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $t_n = \frac{1}{u_n - 2}$ qui est suggérée dans l'énoncé de l'exercice ?

Etude des points fixes de la fonction définie par $f(x) = \frac{x-4}{x-3}$

$\forall x \neq 3$ résolvons l'équation $f(x) = x$

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{x-4}{x-3} = x \Leftrightarrow x-4 = x(x-3) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Donc 1 seul point fixe et d'après le cours en posant $\alpha = 2$

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $t_n = \frac{1}{u_n - \alpha}$ c'est-à-dire $v_n = \frac{1}{u_n - 2}$ est une suite arithmétique

et on peut « facilement » calculer la raison et on trouve que $r = -1$ avec $v_0 = -1$

Et on peut calculer de façon explicite (en fonction du paramètre n) le terme v_n puis le terme u_n

Et on peut montrer que $u_n = 2 + \frac{1}{v_n} = 2 - \frac{1}{n+1}$ et donc que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$

Représentation graphique de la fonction f définie par $f(x) = \frac{x-4}{x-3}$

