

Problème : Les suites homographiques

On se donne a, b, d quatre nombres complexes tels que $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$. Soit f la fonction de $\mathbb{C}$ dans lui-même définie par $z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$.

1. Étude d'un premier exemple.

On définit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3}{4 - u_n}$. On pose enfin $g : x \mapsto \frac{3}{4 - x}$.

- (a) Déterminer, sans calcul de dérivée, le sens de variation de g .
- (b) Montrer par récurrence que tous les u_n sont définis et appartiennent à $[0, 1]$.
- (c) On pose, $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_n - 1}{u_n - 3}$. Montrer que les v_n sont tous bien définis, que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme puis donner l'expression de v_n en fonction de n .
- (d) Exprimer u_n en fonction de v_n puis en fonction de n et conclure quant à la convergence de cette suite.

2. Étude d'un second exemple.

On définit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n - 4}{u_n - 3}$. On pose enfin $h : x \mapsto \frac{x - 4}{x - 3}$.

- (a) En vérifiant que $\forall x \neq 3, h(x) = 1 - \frac{1}{x - 3}$, étudier les variations de h sans calcul de dérivée.
- (b) Montrer par récurrence que tous les u_n sont définis et appartiennent à $[0, 2]$.
- (c) On pose $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{1}{u_n - 2}$. Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique dont on déterminera le premier terme et la raison.
- (d) En déduire l'expression de v_n puis celle de u_n en fonction de n et conclure quant à la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On revient à présent à l'étude générale.

- 3. (a) Quel est l'ensemble de définition de f ?
- (b) Montrer que la condition $ad - bc = 0$ entraîne l'injectivité de f . On écrira la relation $f(z_1) = f(z_2)$ sous la forme d'une égalité de produits en croix qu'on réduira.
- (c) Montrer alors que f définit une bijection de son ensemble de définition sur une partie de $\mathbb{C}$ à préciser.

On appelle *point fixe* de f les nombres complexes z solutions de $f(z) = z$.

- 4. (a) Montrer que f admet un ou deux points fixes.
- (b) À quelle condition sur a, b, c, d n'y a-t-il qu'un point fixe?

Indication : se rappeler la discussion de l'équation du second degré.

On définit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par son premier terme u_0 et la relation $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose que les u_n sont définis pour toute valeur de l'entier n .

- 5. On suppose dans cette question 3. que f admet deux points fixes distincts α et β et que $u_0 \notin \{\alpha, \beta\}$.
- (a) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}, w_n = \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$. Justifier que cette suite est bien définie c'est-à-dire que, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \neq \beta$.
- (b) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = \frac{au_n + b - \alpha(cu_n + d)}{au_n + b - \beta(cu_n + d)}$.
- (c) Montrer que $\alpha d - b = \alpha(a - c\alpha)$ et qu'on a une relation analogue pour β .

(d) En déduire que $w_{n+1} = \frac{a - c\alpha}{a - c\beta} \times w_n$.

(e) Exprimer u_n en fonction de w_n puis w_n en fonction de $q = \frac{a - c\alpha}{a - c\beta}$, n et w_0 et enfin donner une expression de u_n au moyen de n , w_0 , α et β .

6. On suppose dans cette question 6. que f admet un seul point fixe α .

(a) Exprimer α au moyen de a , c et d .

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{u_n - \alpha}$ et on suppose que v_n est défini pour tout rang n .

(b) En remarquant que α vérifie encore la relation de la question 5. (c), montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{cu_n + d}{(a - \alpha c)(u_n - \alpha)}$$

(c) En utilisant l'expression de α trouvée à la question 6. (1), montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{u_{n+1} - \alpha} - \frac{1}{u_n - \alpha} = \frac{c}{a - \alpha c}$$

On pose alors $r = \frac{c}{a - \alpha c}$.

(d) Exprimer v_n puis u_n en fonction de v_0 , r et n .