Correction des exercices

BCPST 1 15 - 16 **EXERCICES 7 (SUITE)**

EX 6 Etudier si les applications suivantes sont surjectives, injectives, bijectives.
Lorsqu'elles sont bijectives, expliciter leur bijection réciproque.
Dans tous les cas, décrire le plus précisément possible l'image de leur ensemble de départ.

1) $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto f(z) = \bar{z}$

2) $h: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $z \mapsto h(z) = |z|$

3) $g_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $p \mapsto g_1(p) = p^2$ et $g_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $p \mapsto g_2(p) = p^2$

4) $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto s((x,y)) = x + y$

5) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto \varphi((x,y)) = (x+y, x-y)$

EX 7 Soient $I =]1,+\infty[$ et $f : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = \dfrac{x}{1-x}$

1) Dresser le tableau de variations de f sur $I =]1,+\infty[$ et prouver que f réalise une bijection de I sur un certain intervalle J à préciser. On note $\tilde{f}$ cette bijection.

2) Retrouver le fait que $\tilde{f}$ est bijective à l'aide de la définition d'une bijection de I sur J et déterminer la bijection réciproque de $\tilde{f}$ (c'est-à-dire donner l'expression de $\tilde{f}^{-1}(y)$ pour tout élément y de J)

EX 8 Même exercice que le précédent avec $I =]0, +\infty[$ et $f : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$

EX 9 Soient E, F, G trois ensembles, f une application de E dans F, et g une application de F dans G.
Montrer que :

1) Soit fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z) = \bar{z}$

On peut écrire que $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
$z \mapsto f(z) = \bar{z}$

Quelques commentaires :
La fonction f est bien une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ car si $z \in \mathbb{C}$ alors $\bar{z} \in \mathbb{C}$

C'est une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$
car le domaine de définition de cette fonction est l'ensemble $\mathbb{C}$ et on écrit que $D_f = \mathbb{C}$

et on peut montrer que l'ensemble image est l'ensemble $\mathbb{C}$ car on a $f(D_f) = \mathbb{C}$
et donc on peut conclure que la fonction f est une application surjective de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$

De plus comme on a $\forall z \in \mathbb{C} \quad f \circ f(z) = f\left[f(z)\right] = f(\bar{z}) = \bar{\bar{z}} = z$

la fonction f est une involution sur $\mathbb{C}$ (c'est une bijection qui vérifie $f^{-1} = f$)

<u>CONCLUSION</u> : L'application f est bijective de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$
et on a $f^{-1} = f$ car $f \circ f = Id_{\mathbb{C}}$

La fonction f est injective de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ car $\forall z \in \mathbb{C} \quad \forall z' \in \mathbb{C} \quad f(z) = f(z') \Rightarrow z = z'$
La fonction f est surjective de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ car $\forall z \in \mathbb{C} \quad \exists\, z_1 \in \mathbb{C} \quad z = f(z_1)$

<u>Remarque</u> :
La fonction f est bijective de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ car $\forall z \in \mathbb{C} \quad \exists!\, z_1 \in \mathbb{C} \quad z = f(z_1)$
(ce qui est très facile à montrer….)

2)
$$\begin{aligned} h \; : \; & \mathbb{C} \to \mathbb{R} \\ & z \mapsto h(z) = |z| \end{aligned}$$

La fonction h de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$ est une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$ car $D_h = \mathbb{C}$

Elle n'est pas surjective car $h(\mathbb{C}) = \mathbb{R}^+$
par exemple : le nombre $z = -1$ n'a pas d'antécédent

Elle n'est pas injective car on a pas : $\forall z \in \mathbb{C} \quad \forall z' \in \mathbb{C} \quad f(z) = f(z') \Rightarrow z = z'$

Il suffit de trouver un contre-exemple : Prenons $z = e^{i\frac{\pi}{2}}$ et $z' = e^{-i\frac{\pi}{2}}$
on a bien $f(z) = f(z') = 1$ avec $z \neq z'$

3.1)
$$\begin{aligned} g \; : \; & \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ & p \mapsto g(p) = p^2 \end{aligned}$$

Cette fonction est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$

Ce n'est pas une application surjective de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$
car tout entier naturel y n'a pas forcément un antécédent qui est soit $\sqrt{y} \in \mathbb{N}$ ou soit $-\sqrt{y} \in \mathbb{N}$

Par exemple $y = 3$ on a $y \in \mathbb{N}$ et ni $\sqrt{3} \in \mathbb{N}$ et ni $-\sqrt{3} \in \mathbb{N}$

C'est une application injective de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$

car $\forall p \in \mathbb{N} \quad \forall p' \in \mathbb{N} \qquad g(p) = g(p') \Rightarrow p^2 = p'^2 \Rightarrow p = p' \quad ou \quad p = -p'$

et comme car $p \in \mathbb{N} \quad et \quad p' \in \mathbb{N} \qquad alors \quad p = -p' \quad est\ impossible$

donc $\forall p \in \mathbb{N} \quad \forall p' \in \mathbb{N} \qquad g(p) = g(p') \Rightarrow p = p'$

<u>CONCLUSION</u> : La fonction g de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$ est une application injective de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$

3.2) $g \quad : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$

$p \mapsto g(p) = p^2$

Cette fonction est une application de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{N}$
Elle n'est pas surjective car les éventuels antécédents de $3 \in \mathbb{N}$ par la fonction g sont $\sqrt{3} \notin \mathbb{Z}$ et $-\sqrt{3} \notin \mathbb{Z}$

Elle n'est pas injective car on n'a pas $\forall p \in \mathbb{N} \quad \forall p' \in \mathbb{N} \qquad g(p) = g(p') \Rightarrow p = p'$

On peut montrer qu'elle n'est pas injective de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{N}$ car le nombre entier **4** a 2 antécédents dans $\mathbb{Z}$ qui sont **2** et **-2**

5) $\varphi \quad : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$(x\,;y) \mapsto \varphi(\,(x\,;y)\,) = (x+y\,;x-y)$

La fonction φ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est une application bijective

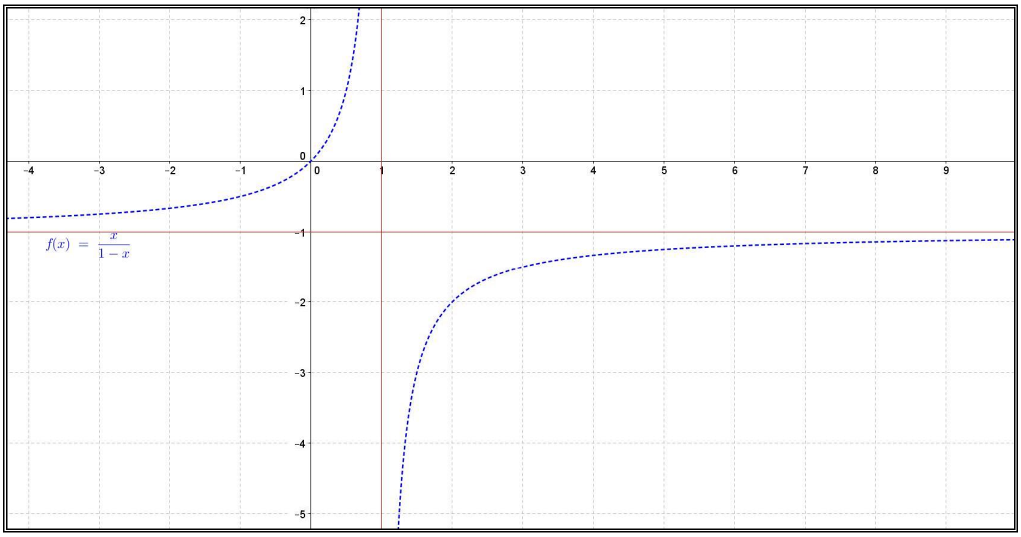
car on a $\forall (x'\,;y') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad \exists!(x\,;y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad (x'\,;y') = \varphi((x\,;y))$

car on a un système de 2 équations à 2 inconnues qui sont x et y

et ce système **a une et une seule** solution $\begin{cases} x + y = x' \\ x - y = y' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{x' + y'}{2} \\ y = \dfrac{x' - y'}{2} \end{cases}$

L'application φ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ **est donc injective et surjective**

Exercice n ° 7

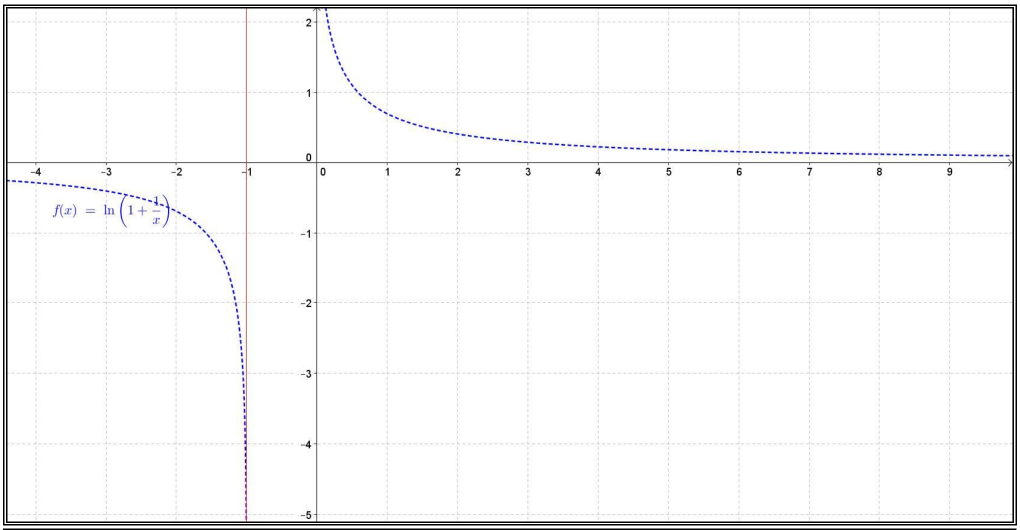


D'après la généralisation du théorème de la BIJECTION sur un segment $[a\ ;\ b]$

on peut montrer que la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$

est une bijection de $]1\ ;\ +\infty[$ sur $]-\infty\ ;\ -1[$

Exercice n ° 8



D'après la généralisation du théorème de la BIJECTION sur un segment $[a\ ;\ b]$

on peut montrer que la fonction f définie par $\mathrm{f}(\mathrm{x})=\ln\left(1+\dfrac{1}{\mathrm{x}}\right)$

est une bijection de $]1\ ;\ +\infty[$ sur $\mathbb{R}^{+*}$