

Comparaison de fonctions numériques

Exercice 1 [01821] [\[correction\]](#)

Déterminer un équivalent simple aux expressions suivantes quand $x \rightarrow +\infty$

$$\text{a) } \frac{\sqrt{x^3+2}}{\sqrt[3]{x^2+3}} \quad \text{b) } \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1} \quad \text{c) } \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$$

Exercice 2 [00306] [\[correction\]](#)

Déterminer un équivalent simple aux expressions suivantes quand $x \rightarrow +\infty$

$$\text{a) } \frac{\ln(x+1)}{\ln x} - 1 \quad \text{b) } \sqrt{\ln(x+1)} - \sqrt{\ln(x-1)} \quad \text{c) } x \ln(x+1) - (x+1) \ln x$$

Exercice 3 [01823] [\[correction\]](#)

Déterminer un équivalent simple aux expressions suivantes quand $x \rightarrow 0$

$$\text{a) } \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} \quad \text{b) } \tan x - \sin x \quad \text{c) } e^x + x - 1$$

Exercice 4 [00313] [\[correction\]](#)

Déterminer un équivalent simple aux expressions suivantes quand $x \rightarrow 0$

$$\text{a) } \ln(1 + \sin x) \quad \text{b) } \ln(\ln(1+x)) \quad \text{c) } (\ln(1+x))^2 - (\ln(1-x))^2$$

Exercice 5 [00305] [\[correction\]](#)

Déterminer un équivalent de $\ln(\cos x)$ quand $x \rightarrow (\pi/2)^-$

Exercice 6 [01822] [\[correction\]](#)

Déterminer les limites suivantes :

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^{-x} + x^2}{x - \ln x} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x - x}{x + \cos x} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x e^x - x^2}}{e^x + e^{-x}}$$

Exercice 7 [00705] [\[correction\]](#)

Déterminer les limites suivantes :

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\ln x}}{\ln x} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{\ln x} \right)^{\frac{\ln x}{x}} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{\ln x}$$

Exercice 8 [00704] [\[correction\]](#)

Déterminer les limites suivantes :

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \sin x}{x \ln x} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x + x^2}{\ln(x + x^2)} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1}$$

Exercice 9 [01824] [\[correction\]](#)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction décroissante telle que

$$f(x) + f(x+1) \sim_{+\infty} \frac{1}{x}$$

a) Etudier la limite de f en $+\infty$.

b) Donner un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 10 [03381] [\[correction\]](#)

Déterminer

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(x) \ln(1-x)$$

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

a) Quand $x \rightarrow +\infty$,

$$\frac{\sqrt{x^3+2}}{\sqrt[3]{x^2+3}} \sim \frac{x^{3/2}}{x^{2/3}} = x^{5/6}$$

b) Quand $x \rightarrow +\infty$,

$$\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1} = x + o(x) + x + o(x) = 2x + o(x) \sim 2x$$

c) Quand $x \rightarrow +\infty$,

$$\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} = \frac{(x^2+1) - (x^2-1)}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}} = \frac{2}{x + o(x) + x + o(x)} \sim \frac{1}{x}$$

Exercice 2 : [énoncé]

a) Quand $x \rightarrow +\infty$,

$$\frac{\ln(x+1)}{\ln x} - 1 = \frac{\ln(1+1/x)}{\ln x} \sim \frac{1}{x \ln x}$$

b) Quand $x \rightarrow +\infty$,

$$\sqrt{\ln(x+1)} - \sqrt{\ln(x-1)} = \frac{\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}{\sqrt{\ln(x+1)} + \sqrt{\ln(x-1)}}$$

Or

$$\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \ln\left(1 + \frac{2}{x-1}\right) \sim \frac{2}{x-1} \sim \frac{2}{x}$$

et

$$\sqrt{\ln(x+1)} + \sqrt{\ln(x-1)} = 2\sqrt{\ln x} + o(\sqrt{\ln x}) \sim 2\sqrt{\ln x}$$

donc

$$\sqrt{\ln(x+1)} - \sqrt{\ln(x-1)} \sim \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}$$

h) Quand $x \rightarrow +\infty$,

$$x \ln(x+1) - (x+1) \ln x = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \ln x = 1 + o(1) - \ln x \sim -\ln x$$

Exercice 3 : [énoncé]

a) Quand $x \rightarrow 0$,

$$\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} = \frac{2x^2}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}} \sim \frac{2x^2}{2} = x^2$$

b) Quand $x \rightarrow 0$,

$$\tan x - \sin x = \tan x(1 - \cos x) = 2 \tan x \sin^2 \frac{x}{2} \sim \frac{x^3}{2}$$

c) Quand $x \rightarrow 0$,

$$e^x - 1 \sim x$$

donc

$$e^x + x - 1 = x + x + o(x) = 2x + o(x) \sim 2x$$

Exercice 4 : [énoncé]

a) Quand $x \rightarrow 0$,

$$\ln(1 + \sin x) \sim \sin x$$

car $\sin x \rightarrow 0$, or

$$\sin x \sim x$$

donc

$$\ln(1 + \sin x) \sim x$$

b) Quand $x \rightarrow 0$,

$$\ln(1+x) \sim x \rightarrow 0 \neq 1$$

donc

$$\ln(\ln(1+x)) \sim \ln(x)$$

c) Quand $x \rightarrow 0$,

$$\ln(1+x)^2 - \ln(1-x)^2 = (\ln(1+x) + \ln(1-x))(\ln(1+x) - \ln(1-x))$$

or

$$\ln(1+x) + \ln(1-x) = \ln(1-x^2) \sim -x^2$$

et

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = x + o(x) - (-x + o(x)) = 2x + o(x)$$

donc

$$(\ln(1+x))^2 - (\ln(1-x))^2 \sim -2x^3$$

Exercice 5 : [énoncé]

Quand $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$, posons $x = \frac{\pi}{2} - h$ avec $h \rightarrow 0^+$

$$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - h\right) = \sin h$$

Or

$$\sin h \sim h \rightarrow 0 \neq 1$$

donc

$$\ln \sin h \sim \ln h$$

puis

$$\ln \cos x \sim \ln\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Exercice 6 : [énoncé]

a) Quand $x \rightarrow +\infty$,

$$\frac{xe^{-x} + x^2}{x - \ln x} \sim \frac{x^2}{x} = x \rightarrow +\infty$$

b) Quand $x \rightarrow +\infty$,

$$\frac{x \ln x - x}{x + \cos x} \sim \frac{x \ln x}{x} = \ln x \rightarrow +\infty$$

c) Quand $x \rightarrow +\infty$,

$$\frac{\sqrt{xe^x - x^2}}{e^x + e^{-x}} \sim \sqrt{x}e^{-x/2} \rightarrow 0$$

Exercice 7 : [énoncé]

a) Quand $x \rightarrow +\infty$,

$$\frac{x^{\ln x}}{\ln x} = e^{(\ln x)^2 - \ln \ln x} = e^{(\ln x)^2 + o(\ln x)^2} \rightarrow +\infty$$

b) Quand $x \rightarrow +\infty$,

$$\left(\frac{x}{\ln x}\right)^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\frac{\ln x}{x} \ln x - \frac{\ln x}{x} \ln \ln x} = e^{\frac{(\ln x)^2}{x} + o\left(\frac{(\ln x)^2}{x}\right)} \rightarrow 1$$

c) Quand $x \rightarrow +\infty$,

$$\frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{\ln x} = \frac{\ln(2x + o(x))}{\ln x} \sim \frac{\ln 2 + \ln x}{\ln x} \sim 1 \rightarrow 1$$

Exercice 8 : [énoncé]

a) Quand $x \rightarrow 0^+$,

$$\frac{x + \sin x}{x \ln x} = \frac{x + x + o(x)}{x \ln x} \sim \frac{2}{\ln x} \rightarrow 0$$

b) Quand $x \rightarrow 0^+$,

$$\ln x + x^2 = \ln x + o(\ln x)$$

et puisque

$$x + x^2 \sim x \rightarrow 0 \neq 1$$

on a

$$\ln(x + x^2) \sim \ln x$$

donc

$$\frac{\ln x + x^2}{\ln(x + x^2)} \sim \frac{\ln x}{\ln x} = 1 \rightarrow 1$$

c) Quand $x \rightarrow 1$, on peut écrire $x = 1 + h$ avec $h \rightarrow 0$,

$$\frac{\ln x}{x^2 - 1} = \frac{\ln(1+h)}{2h+h^2} \sim \frac{h}{2h} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$$

Exercice 9 : [énoncé]

a) f est décroissante donc possède une limite ℓ en $+\infty$.

Quand $x \rightarrow +\infty$, $f(x) \rightarrow \ell$ et $f(x+1) \rightarrow \ell$ donc

$$f(x) + f(x+1) \rightarrow 2\ell$$

or

$$f(x) + f(x+1) \sim \frac{1}{x} \rightarrow 0$$

donc $\ell = 0$.

b) Quand $x \rightarrow +\infty$, on a

$$f(x+1) + f(x) \leq 2f(x) \leq f(x) + f(x-1)$$

donc

$$2f(x) \sim \frac{1}{x}$$

puis

$$f(x) \sim \frac{1}{2x}$$

Exercice 10 : [énoncé]

Posons $x = 1 - h$.

Quand $x \rightarrow 1^-$, on a $h \rightarrow 0^+$ et

$$\ln(x) \ln(1-x) = \ln(1-h) \ln h \sim -h \ln h \rightarrow 0$$