EXERCICES SUR LES MATRICES

EX 3 Soient $A = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 3 \\ -6 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) Déterminer les réels λ pour lesquels la matrice $A - \lambda I_3$ n'est pas inversible. (Ces réels sont appelés les valeurs propres de A)

Pour tout réel λ , résoudre le système (Σ_λ) dont l'écriture matricielle est : $(A - \lambda I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2) a) Vérifier que chaque colonne de P correspond à une solution du système (Σ_λ) pour une valeur propre λ à préciser dans chaque cas.

b) Démontrer que P et inversible et calculer son inverse.

3) a) Calculer la matrice $D = P^{-1}AP$ et vérifier qu'elle est diagonale. Que remarque-t-on à propos de ses coefficients diagonaux ?

b) Exprimer A à l'aide de D, P et P^{-1}.

4) Une application :

a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = P\, D^n\, P^{-1}$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, expliciter les coefficients de A^n

https://matrixcalc.org/fr/vectors.html

Soit les 2 matrices $\quad A = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 3 \\ -6 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On peut « *facilement* » calculer $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Et on peut calculer $P^{-1}\, A\, P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 3 & 3 \\ -6 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

On a diagonalisé la matrice A et on a : $P^{-1}\, A\, P = D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Et on peut démontrer par récurrence sur n que $\quad P^{-1}\, A^n\, P = D = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix}$

Calcul des valeurs propres

$$\begin{vmatrix} -4-\lambda & 3 & 3 \\ -6 & 5-\lambda & 6 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda^3) + 6 \times \lambda^2 - 3 \times \lambda - 10 = (-1)(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-5)$$

$$\lambda_1 = -1$$
$$\lambda_2 = 2$$
$$\lambda_3 = 5$$

Le polynôme caractéristique est

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}) = -\mathrm{X}^3 + 6\mathrm{X}^2 - 3\mathrm{X} - 10$$
$$\mathrm{P}(\mathrm{X}) = -(\mathrm{X}-(-1))(\mathrm{X}-2)(\mathrm{X}-5) = -(\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}-2)(\mathrm{X}-5)$$

Et on peut vérifier que

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}) = -\mathrm{X}^3 + 6\mathrm{X}^2 - 3\mathrm{X} - 10 = -\mathrm{X}^3 + \mathrm{trace}\ (\mathrm{A})\mathrm{X}^2 - \mathrm{rang}\ (\mathrm{A})\ \mathrm{X} + \det\ (\mathrm{A})$$

avec

$$\det(\mathrm{A}) = \begin{vmatrix} -4 & 3 & 3 \\ -6 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -10$$

$$\mathrm{rang}(\mathrm{A}) = \mathrm{rang}\begin{pmatrix} -4 & 3 & 3 \\ -6 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 3$$

$$\mathrm{trace}(\mathrm{A}) = \mathrm{trace}\begin{pmatrix} -4 & 3 & 3 \\ -6 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = -4+5+5 = 6$$

Et la matrice $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice de passage

de la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 3 \\ -6 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ vers la matrice $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Les 3 vecteurs propres

Pour la valeur propre $\lambda_1 = -1$ le vecteur propre est $\vec{u}_1 = 1$

Pour la valeur propre $\lambda_2 = 2$ le vecteur propre est $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Pour la valeur propre $\lambda_3 = 5$ le vecteur propre est $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Calcul des vecteurs propres

2) Calcul des vecteurs propres pour chaque valeur propre:

$\lambda_1 = -1$

$$A - \lambda \times E = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 3 \\ -6 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$A - \lambda \times E = O$, C'est le système d'équations linéaires, nous pouvons résoudre le système par la méthode d'élimination de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 3 & 3 & 0 \\ -6 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right) \times \left(\frac{-1}{3}\right) \underset{R_1/(-3) \to R_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -6 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right) \times (6) \underset{R_2-(-6)\times R_1 \to R_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right) \underset{R_3 \leftrightarrow R_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \times \left(\frac{1}{6}\right) \underset{R_2/(6) \to R_2}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \times (1) \underset{R_1-(-1)\times R_2 \to R_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \quad (1) \end{cases}$$

Trouvions la variable x_3 de l'équation 2 de la système (1):

$x_3 = 0$

Trouvions la variable x_1 de l'équation 1 de la système (1):

$x_1 = x_2$

$$X = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = 2$

$$A - \lambda \times E = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 3 \\ -6 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$A - \lambda \times E = O$, C'est le système d'équations linéaires, nous pouvons résoudre le système par la méthode d'élimination de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -6 & 3 & 3 & 0 \\ -6 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \times \left(\tfrac{-1}{6}\right) \xrightarrow{R_1/(-6) \to R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ -6 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \times (6) \xrightarrow{R_2-(-6)\times R_1 \to R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \times \left(\tfrac{1}{3}\right) \xrightarrow{R_2/(3) \to R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \times (-3) \xrightarrow{R_3-3\times R_2 \to R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \times \left(\tfrac{1}{2}\right) \xrightarrow{R_1-\left(\frac{-1}{2}\right)\times R_2 \to R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{2} \times x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} (1)$$

Trouvions la variable x_3 de l'équation 2 de la système (1):

$x_3 = 0$

Trouvions la variable x_1 de l'équation 1 de la système (1):

$x_1 = \frac{1}{2} \times x_2$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \times x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_3 = 5$

$$A - \lambda \times E = \begin{pmatrix} -9 & 3 & 3 \\ -6 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$A - \lambda \times E = O$, C'est le système d'équations linéaires, nous pouvons résoudre le système par la méthode d'élimination de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -9 & 3 & 3 & 0 \\ -6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \times \left(\tfrac{-1}{9}\right) \xrightarrow{R_1/(-9) \to R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \\ -6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \times (6) \xrightarrow{R_2-(-6)\times R_1 \to R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \times \left(\tfrac{-1}{2}\right) \xrightarrow{R_2/(-2) \to R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \times \left(\tfrac{1}{3}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1-\left(\frac{-1}{3}\right)\times R_2 \to R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - 2 \times x_3 = 0 \end{cases} (1)$$

Trouvions la variable x_2 de l'équation 2 de la système (1):

$x_2 = 2 \times x_3$

Trouvions la variable x_1 de l'équation 1 de la système (1):

$x_1 = x_3$

$$X = \begin{pmatrix} x_3 \\ 2 \times x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$$