EXERCICES SUR LES MATRICES

Soient A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et B une matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
On considère une suite $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de matrices-colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ définie par son premier terme U_0 et la relation de récurrence : $\forall k \in \mathbb{N},\ U_k = AU_{k-1} + B$.

1) <u>Informatique</u> :

a) Dans un script python où `numpy` sera importé avec l'alias `np`, écrire une fonction `suite1` d'arguments `k`, `U0`, `A`, `B`, qui, lorsque `A` est une matrice carrée quelconque et `U0` et `B` sont deux <u>vecteurs</u> numpy dont la longueur est égale au nombre de lignes de `A`, (`U0` correspondant à la matrice-colonne U_0) renvoie le <u>vecteur</u> numpy correspondant à la matrice-colonne U_n.
NB : on n'utilisera aucune "*vraie* matrice-colonne `numpy`" dans cette fonction.
On utilisera le fait que python accepte de calculer (avec la méthode ou la fonction `dot`) le produit d'une matrice par un vecteur `numpy` de taille compatible et renvoie un vecteur `numpy`
(cf cours : remarque à la fin du II D) 5))

b) Dans ce script, définir deux variables globales `A`, `B` contenant respectivement la matrice $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ et le vecteur `numpy` correspondant à $B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Ajouter des instructions permettant d'observer l'évolution des coefficients de U_k lorsque k tend vers $+\infty$, pour différentes valeurs du premier terme U_0.
Emettre une conjecture au vu des résultats.

c) Peut-on faire la même conjecture avec les matrices $A' = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B' = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$?

Dans la suite du problème on suppose que A et B sont les matrices définies dans la question 1) b)

2) On note : $\forall k \in \mathbb{N},\ U_k = \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}$.

a) Montrer qu'il existe une unique matrice C de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ telle que : $C = AC + B$.
On raisonnera le plus longtemps possible avec les noms des matrices, et on n'explicitera les coefficients de C qu'à la fin du raisonnement.

b) On pose : $\forall k \in \mathbb{N},\ V_k = U_k - C$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$ exprimer V_k à l'aide de A et V_{k-1}.

c) En déduire une conjecture sur l'expression de V_k en fonction de V_0 et d'une puissance de A, et démontrer cette conjecture.
NB : Attention à l'ordre des facteurs dans les produits matriciels !

d) En déduire une expression de U_k en fonction de U_0, C et d'une puissance de A.

3) <u>Informatique</u> :
Dans le script précédent,
- définir la variable globale `C` contenant le vecteur numpy correspondant à la matrice colonne `C`;
- écrire une fonction `suite2` d'arguments `k` et `U0` qui utilise les variables `A`, `B`, `C`, et renvoie le vecteur `numpy` correspondant à U_k, sans calculer aucune puissance de A.
Comparer les résultats obtenus par les fonctions `suite1` et `suite2` pour des données identiques.

Soit les 2 matrices $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

et soit la matrice « colonne » $U_k = \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}$

Si on pose $V_k = U_k - C$ avec $C = AC + B$

On peut « *facilement* » écrire

$$U_k = AU_{k-1} + B \Leftrightarrow V_k + C = A\left(V_{k-1} + C\right) + B \Leftrightarrow V_k + C = AV_{k-1} + AC + B \Leftrightarrow V_k = AV_{k-1}$$

Et donc la suite $\left(V_n\right)$ est une suite géométrique de raison A et de 1er terme $V_0 = U_0 - C$

Et donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad V_n = V_0 \ A^n$

et on en déduit que $\forall k \in \mathbb{N} \quad U_n = \left(U_0 - C\right) A^k + C$