Corrigé

1. a) On utilise le procédé télescopique en écrivant

$$u_n = \ln\frac{n}{n+1} - \ln\frac{n+1}{n+2}\,.$$

Si l'on pose, pour $n \geq 1$,

$$v_n = \ln\frac{n}{n+1}\,,$$

on a

$$u_n = v_n - v_{n+1}\,.$$

Alors

$$\sum_{n=1}^{N} u_n = \sum_{n=1}^{N}(v_n - v_{n+1}) = v_1 - v_{N+1}\,,$$

et puisque la suite (v_n) admet 0 comme limite, on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = v_1 = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2\,.$$

b) On commence par décomposer la fraction rationnelle en éléments simples. On a

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{x+3}\,.$$

Alors

$$a = \lim_{x\to-1}(x+1)f(x) = \frac{1}{2} \quad , \quad b = \lim_{x\to-2}(x+2)f(x) = -1 \quad , \quad c = \lim_{x\to-3}(x+3)f(x) = \frac{1}{2}\,,$$

donc

$$u_n = \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{2(x+3)}\,.$$

Pour calculer la somme, on peut utiliser deux méthodes.

Première méthode : le procédé télescopique. On peut écrire

$$u_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right)\,,$$

et donc, si l'on pose, pour $n \geq 0$,

$$v_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)\,,$$

on a

$$u_n = v_n - v_{n+1}\,,$$

et puisque la suite (v_n) converge vers 0, on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = v_0 = \frac{1}{4}\,.$$

Deuxième méthode : calcul des sommes partielles. On a

$$\sum_{n=0}^{N} u_n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n+1} - \sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n+2} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n+3}\,.$$

En posant $n' = n-1$ dans la première somme du membre de droite et $n'' = n+1$ dans la troisième, on obtient

$$\sum_{n=0}^{N} u_n = \frac{1}{2}\sum_{n'=-1}^{N-1}\frac{1}{n'+2} - \sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n+2} + \frac{1}{2}\sum_{n''=1}^{N+1}\frac{1}{n''+2}\,,$$

où encore, puisque les indices n' et n'' sont muets,

$$\sum_{n=0}^{N} u_n = \frac{1}{2}\sum_{n=-1}^{N-1}\frac{1}{n+2} - \sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n+2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N+1}\frac{1}{n+2}\,.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} u_n &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n+2}\right)\\ &\quad -\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n+2}+\frac{1}{N+2}\right)\\ &\quad +\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n+2}+\frac{1}{N+2}+\frac{1}{N+3}\right)\,.\end{aligned}$$

La somme se simplifie, et il reste

$$\sum_{n=0}^{N} u_n = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{N+2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{N+2}+\frac{1}{N+3}\right)\,,$$

et lorsque N tend vers l'infini, on trouve

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\,.$$

c) On peut écrire

$$u_n = 9\left(\frac{3}{7}\right)^{n-2}\,,$$

et on a une série géométrique, donc

$$\sum_{n=2}^{\infty} u_n = 9\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{3}{7}\right)^{n-2} = 9\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{7}\right)^{n} = \frac{9}{1-\dfrac{3}{7}} = \frac{63}{4}\,.$$

d) Si l'on calcule les premières sommes partielles, on obtient

$$S_0 = \ln(1+x) = \ln\frac{1-x^2}{1-x}\,,$$

$$S_1 = \ln(1+x) + \ln(1+x^2) = \ln[(1+x)(1+x^2)] = \ln(1+x+x^2+x^3) = \ln \frac{1-x^4}{1-x}\,,$$

$$S_3 = S_2 + \ln(1+x^4) = \ln \frac{(1-x^4)(1+x^4)}{1-x} = \ln \frac{1-x^8}{1-x}\,.$$

Il semble que l'on obtienne la formule

$$S_n = \ln \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}\,,$$

ce que l'on démontre par récurrence.

Si la propriété est vraie à l'odre n, alors

$$S_{n+1} = S_n + \ln(1+x^{2^{n+1}}) = \ln \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x} + \ln(1+x^{2^{n+1}}) = \ln \frac{(1-x^{2^{n+1}})(1+x^{2^{n+1}})}{1-x} = \ln \frac{1-x^{2\times 2^{n+1}}}{1-x}\,,$$

ce qui donne la propriété à l'ordre $n+1$:

$$S_{n+1} = \ln \frac{1-x^{2^{n+2}}}{1-x}\,.$$

Alors, comme $0 < x < 1$, la suite $(x^{2^{n+1}})$ converge vers 0, et l'on a

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \ln \frac{1}{1-x} = -\ln(1-x)\,.$$

e) On décompose la fraction en éléments simples ce qui donne

$$\frac{3}{(3n+1)(3n+4)} = \frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3n+4}\,,$$

et donc, si l'on pose, pour $n \geq 0$,

$$v_n = \frac{1}{3n+1}\,,$$

on a

$$u_n = v_n - v_{n+1}\,,$$

et puisque la suite (v_n) converge vers 0, on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = v_0 = 1\,.$$

2. a) On obtient facilement un équivalent

$$u_n = \frac{3^n}{5^n} \frac{1 + \dfrac{n^4}{3^n}}{1 - \left(\dfrac{3}{5}\right)^n} \sim \left(\frac{3}{5}\right)^n\,.$$

Or la série de terme général $(3/5)^n$ est une série géométrique positive de raison $3/5 < 1$. Elle converge donc. Il en résulte que la série de terme général u_n converge aussi.

b) On écrit

$$u_n = \frac{e^{2n} + e^{-2n}}{e^{3n} + e^{-3n}} = \frac{e^{2n}}{e^{3n}} \frac{1 + e^{-4n}}{1 + e^{-6n}} \sim \left(\frac{1}{e}\right)^n .$$

Or la série de terme général $(1/e)^n$ est une série géométrique positive de raison $1/e < 1$. Elle converge donc. Il en résulte que la série de terme général u_n converge aussi.

c) On écrit

$$u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

Mais

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left[n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right] ,$$

et en utilisant le développement limité en 0 de $\ln(1 + u)$, on obtient

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left[n\left(\frac{1}{n} + \circ\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right] = e^{1+\circ(1)} \sim e ,$$

donc

$$u_n \sim e \left(\frac{1}{2}\right)^n .$$

Or la série de terme général $(1/2)^n$ est une série géométrique positive de raison $1/2 < 1$. Elle converge donc. Il en résulte que la série de terme général u_n converge aussi.

d) Si $a = 0$, on a $u_n = 0$, et la série converge. Supposons donc $a \neq 0$. En sachant que

$$\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} ,$$

on obtient

$$u_n = \frac{e^{2n+2a} - 1}{e^{2n+2a} + 1} - \frac{e^{2n} - 1}{e^{2n} + 1} ,$$

d'où l'on tire

$$u_n = \frac{2e^{2n+2a} - 2e^{2n}}{(e^{2n+2a} + 1)(e^{2n} + 1)} .$$

On en déduit l'équivalent

$$u_n \sim \frac{2e^{2n}(e^{2a} - 1)}{e^{2n+2a}e^{2n}} = \frac{2(1 - e^{-2a})}{e^{2n}} = 2(1 - e^{-2a}) \left(\frac{1}{e^2}\right)^n .$$

Or la série de terme général $(1/e^2)^n$ est une série géométrique positive de raison $1/e^2 < 1$. Elle converge donc. Il en résulte que la série de terme général u_n converge aussi.

e) On a

$$0 \leq u_n = \frac{1}{(3 + (-1)^n)^n} \leq \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n .$$

Or la série de terme général $(1/2)^n$ est une série géométrique de raison $1/2 < 1$. Elle converge donc. Il en résulte que la série de terme général u_n converge aussi.

f) Si $|x| > 1$, on a

$$u_n \sim \left(\frac{1}{x^2}\right)^n .$$

Or la série de terme général $(1/x^2)^n$ est une série géométrique positive de raison $1/x^2 < 1$. Elle converge donc. Il en résulte que la série de terme général u_n converge aussi.

Si $|x| < 1$, la suite (u_n) converge vers 1, et si $|x| = 1$ elle converge vers $1/2$. Dans les deux cas la limite de la suite (u_n) n'est pas nulle, et la série de terme général u_n diverge.

3. a) En utilisant le développement limité de $\cos u$ en 0, on obtient

$$u_n = 1 - \left(1 - \frac{1}{2n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{2n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{2n^2} .$$

Or $1/2n^2$ est le terme général d'une série de Riemann positive convergente. Il en résulte que la série de terme général u_n converge aussi.

b) On peut écrire

$$u_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-1/n} - 1 = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1/n} - 1 = \exp\left(-\frac{1}{n}\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) - 1 .$$

En utilisant le développement limité de $\ln(1+u)$ en 0, on obtient

$$u_n = \exp\left(-\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} + \circ\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) - 1 = \exp\left(-\frac{1}{n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - 1 .$$

Alors, en utilisant le développement limité de e^u en 0, on en déduit

$$u_n = \left(1 - \frac{1}{n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - 1 \sim -\frac{1}{n^2} .$$

Or $-1/n^2$ est le terme général d'une série de Riemann négative convergente. Il en résulte que la série de terme général u_n converge aussi.

c) On écrit

$$u_n = \frac{1}{n}\exp\left(-\frac{2\ln n}{n}\right) .$$

Mais la suite $(\ln n/n)$ converge vers 0, donc la suite $(\exp\left(-\frac{2\ln n}{n}\right))$ converge vers 1. Alors

$$u_n \sim \frac{1}{n} .$$

Or $1/n$ est le terme général d'une série de Riemann positive divergente. Il en résulte que la série de terme général u_n diverge aussi.

d) En utilisant le développement limité de $\cos u$ en 0, on obtient

$$u_n = \exp\left(1 - \frac{1}{2n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \exp\left(1 - \frac{4}{2n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) .$$

On met e en facteur, ce qui donne

$$u_n = e\left(\exp\left(-\frac{1}{2n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \exp\left(-\frac{4}{2n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right),$$

et en utilisant le développement limité en 0 de e^u, on trouve

$$u_n = e\left[\left(1 - \frac{1}{2n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \left(1 - \frac{2}{n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right] = e\left(\frac{3}{2n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \sim \frac{3e}{2n^2}.$$

Or $3e/(2n^2)$ est le terme général d'une série de Riemann positive convergente. Il en résulte que la série de terme général u_n converge aussi.

e) On a

$$u_n = e^{\ln n \ln x} = n^{\ln x} = \frac{1}{n^{-\ln x}}.$$

La série de terme général u_n est une série de Riemann. Elle converge si et seulement si $-\ln x > 1$, c'est-à-dire $x < 1/e$.

f) Lorsque $a \geq 1$, la suite (u_n) ne converge pas vers 0 et la série de terme général u_n diverge.

Lorsque $0 < a < 1$, la suite $(n^2 u_n) = (n^4 a^{\sqrt{n}})$ converge vers 0 (produit d'une exponentielle et d'une puissance), donc à partir d'un certain rang, on a

$$n^2 u_n \leq 1,$$

c'est-à-dire

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^2},$$

et puisque la série de terme général $1/n^2$ est une série de Riemann convergente, il en résulte que la série de terme général u_n converge également.

4. Dans cet exercice toutes les séries sont positives à partir d'un certain rang.

a) On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{a^{n+1}} \frac{a^n}{n!} = \frac{n+1}{a}.$$

La suite (u_{n+1}/u_n) admet $+\infty$ comme limite, donc il résulte de la règle de d'Alembert que la série de terme général (u_n) diverge.

b) On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

Par un calcul standart on obtient que la suite (u_{n+1}/u_n) converge vers $e^{-1} < 1$, donc il résulte de la règle de d'Alembert que la série de terme général (u_n) converge.

c) On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)^a} \frac{n^a}{a^n} = a\left(\frac{n}{n+1}\right)^a.$$

La suite (u_{n+1}/u_n) converge vers a, donc il résulte de la règle de d'Alembert que la série de terme général (u_n) converge si $0 \leq a < 1$, et diverge si $a > 1$. Il reste à étudier le cas $a = 1$. Dans ce cas

$$u_n = \frac{1}{n}\,,$$

et l'on obtient la série harmonique qui diverge donc.

d) On a

$$\sqrt[n]{u_n} = a + \frac{1}{n}\,,$$

et la suite $(\sqrt[n]{u_n})$ converge vers a, donc il résulte de la règle de Cauchy que la série de terme général (u_n) converge si $0 \leq a < 1$, et diverge si $a > 1$. Il reste à étudier le cas $a = 1$. Dans ce cas

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\,,$$

et la suite u_n converge vers $e \neq 0$, donc la série de terme général u_n diverge.

e) On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}}{(1+a)\cdots(1+a^{n+1})}\frac{(1+a)\cdots(1+a^n)}{a^n} = \frac{a}{(1+a^{n+1})}\,.$$

– Si $0 < a < 1$, la suite $(\frac{u_{n+1}}{u_n})$ converge vers a.
– Si $a = 1$, la suite $(\frac{u_{n+1}}{u_n})$ converge vers $1/2$.
– Si $a > 1$, la suite $(\frac{u_{n+1}}{u_n})$ converge vers 0.

Dans tous les cas la limite est strictement plus petite que 1, donc il résulte de la règle de d'Alembert que la série de terme général (u_n) converge.

f) On a

$$\sqrt[n]{u_n} = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n}\,,$$

et la suite $(\sqrt[n]{u_n})$ converge vers e^{-x}, donc il résulte de la règle de Cauchy que la série de terme général (u_n) converge si $e^{-x} < 1$, c'est-à-dire si $x > 0$, et diverge si $e^{-x} > 1$, c'est-à-dire si $x < 0$. Il reste à étudier le cas $x = 0$. Dans ce cas $u_n = 1$ et la suite u_n ne converge pas vers 0, donc la série de terme général u_n diverge.

g) On a

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{\sin^2 n}{n} \leq \frac{1}{n}\,,$$

et la suite $(\sqrt[n]{u_n})$ converge vers $0 < 1$, donc il résulte de la règle de Cauchy que la série de terme général (u_n) converge.

5. a) En utilisant le développement limité de e^u en 0, on a immédiatement

$$u_n = \left[1 - \left(1 + \frac{1}{n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right](\ln n)^{1/2} \sim -\frac{1}{n^2(\ln n)^{-1/2}}\,.$$

Or $-\dfrac{1}{n^2(\ln n)^{-1/2}}$ est le terme général d'une série de Bertrand négative convergente. Il en résulte que la série de terme général u_n converge aussi.

b) On a, si $n \geq 2$,

$$n! = n(n-1)\cdots 1 \leq n \times n \cdots \times n = n^n\,,$$

sonc

$$\ln n! \leq n \ln n\,,$$

et finalement

$$u_n \geq \frac{1}{n \ln n} > 0\,.$$

Or $\dfrac{1}{n \ln n}$ est le terme général d'une série de Bertrand divergente. Il en résulte que la série de terme général u_n diverge aussi.

c) On a

$$u_n = \exp(n^{-a} \ln n) - 1\,.$$

La suite $(n^{-a} \ln n)$ converge vers 0, donc on peut utiliser le développement de e^u en 0.

$$u_n = (1 + n^{-a} \ln n + \circ(n^{-a} \ln n)) - 1 \sim n^{-a} \ln n = \frac{1}{n^a (\ln n)^{-1}}\,.$$

La série de terme général $\dfrac{1}{n^a(\ln n)^{-1}}$ est une série de Bertrand qui converge si $a > 1$, et qui diverge si $0 < a < 1$. Lorsque $a = 1$, elle diverge également. La série de terme général u_n possède les mêmes propriétés.

6. Remarquons que toutes les séries de cet exercice sont positives.

a) Formons u_{n+1}/u_n. On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}\,\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \left(\frac{(n+1)!}{n!}\right)^2 \frac{(2n)!}{(2n+2)!}\,.$$

et en simplifiant

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = (n+1)^2 \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{n+1}{4n+2}\,.$$

On en déduit que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{4} < 1\,.$$

La série de terme général u_n converge donc d'après la règle de d'Alembert.

b) Formons u_{n+1}/u_n. On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{((n+1)!)^2}{2^{(n+1)^2}}\,\frac{2^{n^2}}{(n!)^2} = \left(\frac{(n+1)!}{n!}\right)^2 \frac{2^{n^2}}{2^{(n+1)^2}}\,.$$

et en simplifiant

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = (n+1)^2 \frac{1}{2^{2n+1}}\,.$$

On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0 < 1\,.$$

La série de terme général u_n converge donc d'après la règle de d'Alembert.

c) On a

$$u_n \sim \frac{1}{n}\,.$$

Comme la série de terme général $1/n$ diverge, la série de terme général u_n diverge également.

d) Formons u_{n+1}/u_n. On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(\ln n)^n}{(\ln(n+1))^{n+1}} = \left(\frac{\ln n}{\ln(n+1)}\right)^n \frac{1}{\ln(n+1)}\,,$$

donc

$$0 \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{\ln(n+1)}\,,$$

et il résulte du théorème d'encadrement que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0 < 1\,.$$

La série de terme général u_n converge donc d'après la règle de d'Alembert.

e) On a

$$(\ln n)^{\ln n} = e^{\ln n \ln\ln n} = n^{\ln\ln n}\,.$$

Comme $\ln\ln n$ tend vers $+\infty$, on a, à partir d'un certain rang

$$\ln\ln n \geq 2\,,$$

donc

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^2}\,.$$

Comme la série de terme général $1/n^2$ converge, il en résulte que la série de terme général u_n converge également.

f) On a

$$\ln(n^2+n+1) = 2\ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)\,,$$

et

$$\frac{\ln(n^2+n+1)}{2\ln n} = 1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{2\ln n}\,.$$

Comme cette expression converge vers 1, on en déduit que

$$u_n \sim \frac{1}{2\ln n}\,.$$

Mais, on a quel que soit $x > 0$,

$$\ln x \leq x\,,$$

donc

$$\frac{1}{2\ln n} \geq \frac{1}{2n},$$

et comme la série de terme général $1/(2n)$ diverge, il en est de même de celle de terme général $1/(2\ln n)$ puis de celle de terme général u_n.

g) Formons u_{n+1}/u_n. On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{(1+\delta)^{n+1}} \frac{(1+\delta)^n}{n^2} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \frac{1}{1+\delta}.$$

Cette expression converge vers $1/(1+\delta)$. On a alors les trois cas suivants :

- si $-1/2 < \delta < 0$, on a $1/2 < \delta+1 < 1$, donc $1/(1+\delta) > 1$ et la série de terme général u_n diverge,
- si $0 < \delta < 1/2$ on a $\delta + 1 > 1$, donc $1/(1+\delta) < 1$ et la série de terme général u_n converge,
- si $\delta = 0$, on a $u_n = n^2$. Le terme général ne tend pas vers zéro, et la série de terme général u_n diverge.

h) Si l'on connaît les sommes

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

on obtient immédiatement

$$u_n = \frac{3}{2n+1} \sim \frac{3}{2n},$$

et la série de terme général u_n diverge.

Si l'on ne connaît pas les sommes précédantes, on peut utiliser les sommes de Riemann. En effet

$$1^p + 2^p + \cdots + n^p = n^{p+1}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p\right] \sim n^{p+1}\int_0^1 x^p\,dx = \frac{n^{p+1}}{p+1},$$

donc

$$u_n \sim \frac{n^2}{2}\frac{3}{n^3} = \frac{3}{2n}.$$

i) On obtient facilement un équivalent de u_n.

Si $a > 1$,

$$u_n = \frac{a^n}{a^{2n}} \frac{1 + a^{-n}}{1 + na^{-2n}} \sim \frac{1}{a^n}.$$

Or la série géométrique positive de raison $1/a < 1$ converge, donc la série de terme général u_n converge également.

Si $a = 1$,

$$u_n = \frac{2}{n+1} \sim \frac{2}{n}.$$

Or la série harmonique positive de terme général $2/n$ diverge, donc la série de terme général u_n diverge également.

Si $0 < a < 1$,

$$u_n = \frac{1}{n} \frac{1+a^n}{1+\frac{a^{2n}}{n}} \sim \frac{1}{n} .$$

Or la série harmonique positive de terme général $1/n$ diverge, donc la série de terme général u_n diverge également.

j) Comme la suite $\left(n^2 2^{-\sqrt{n}}\right)$ converge vers 0, on a, à partir d'un certain rang

$$n^2 2^{-\sqrt{n}} \leq 1 ,$$

donc

$$2^{-\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n^2} ,$$

et la série de terme général $1/n^2$ converge. On en déduit que la série de terme général u_n converge.

k) On a immédiatement l'équivalent

$$u_n \sim \frac{1}{n^{3/2}} .$$

Comme la série de terme général $1/n^{3/2}$ converge, on en déduit que la série de terme général u_n converge.

l) On peut effectuer un développement limité. Tout d'abord

$$\frac{1}{n+a} = \frac{1}{n} \frac{1}{1+\frac{a}{n}} ,$$

donc

$$\frac{1}{n+a} = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{a}{n} + \circ\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{n} - \frac{a}{n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right) .$$

Alors

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{n+a}} &= 1 + \left(\frac{1}{n} - \frac{a}{n^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{a}{n^2}\right)^2 + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{n} - \frac{a}{n^2} + \frac{1}{2n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right) . \end{aligned}$$

Comme

$$e^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right) ,$$

On a finalement

$$u_n = \frac{a}{n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{a}{n^2} ,$$

Comme la série de terme général $1/n^2$ converge, on en déduit que la série de terme général u_n converge.

On aurait pu également utiliser le théorème des accroissements finis : il existe $c_n \in [1/n,\, 1/(n+1)]$, donc dans $[0,\,1]$, tel que

$$u_n = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+a}\right) e^{c_n}\,,$$

donc

$$0 \leq u_n \leq \frac{a}{n(n+a)} e \leq \frac{ea}{n^2}\,,$$

et l'on conclut avec le théorème de comparaison.

7. En utilisant la formule de Taylor-Young, on a les développements limités

$$f\left(a + \frac{1}{n}\right) = f(a) + \frac{f'(a)}{n} + \frac{f''(a)}{2n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right)\,,$$

et

$$f\left(a - \frac{1}{n}\right) = f(a) - \frac{f'(a)}{n} + \frac{f''(a)}{2n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right)\,,$$

donc

$$u_n = \frac{f''(a)}{n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right)\,.$$

Comme la suite $(n^2 u_n)$ converge vers $f''(a)$, il existe N tel que $n \geq N$ implique

$$|n^2 u_n - f''(a)| \leq 1\,.$$

Alors

$$|n^2 u_n| \leq 1 + |f''(a)|\,,$$

et donc

$$|u_n| \leq \frac{1 + |f''(a)|}{n^2}\,.$$

Comme la série de terme général $1/n^2$ converge, la série de terme général u_n converge absolument, donc converge.

On peut dire également que $u_n = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

8. On suppose que a et b ne sont pas nuls simultanément. On a

$$u_n = \frac{n(1-ac) - bc}{n(an+b)}\,.$$

Si $ac \neq 1$, ou bien $a \neq 0$ et $u_n \sim \dfrac{1-ac}{an}$, ou bien $a = 0$ (donc $b \neq 0$) et $u_n \sim \dfrac{1}{b}$. Dans les deux cas la série diverge.

Si $ac = 1$ (donc $a \neq 0$), on a $u_n \sim -\dfrac{bc}{an^2}$. Dans ce cas la série converge.

L'ensemble des triplets (a, b, c) pour lesquels la série converge est donc $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid ac = 1\}$.

9. Donnons les équivalents de u_n sous forme de tableau. Le résultat dépend de la position de a et b par rapport à 2. Les équivalents sont des suites géométriques.

	$a<2$	$a=2$	$a>2$
$b<2$	1	2	$\left(\dfrac{a}{2}\right)^n$
$b=2$	$\dfrac{1}{2}$	1	$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{2}\right)^n$
$b>2$	$\left(\dfrac{2}{b}\right)^n$	$2\left(\dfrac{2}{b}\right)^n$	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

Le tableau suivant donne la nature de la série de terme général u_n.

	$a<2$	$a=2$	$a>2$
$b<2$	DV	DV	DV
$b=2$	DV	DV	DV
$b>2$	CV	CV	$a\geq b$ DV $a<b$ CV

En résumé l'ensemble des couples (a,b) pour lesquels la série converge est

$$\{(a,b)\in\mathbb{R}^2\,|\,b>2\,,\;0<a<b\}\,.$$

10. a) On a

$$|u_n|=\frac{1}{n}\arctan\frac{1}{n}\,.$$

Puisque l'on a au voisinage de 0,

$$\arctan u\sim u\,,$$

on en déduit que

$$|u_n|\sim\frac{1}{n^2}\,.$$

Comme la série de Riemann de terme général $1/n^2$ converge, il en résulte que la série de terme général $|u_n|$ converge, c'est-à-dire que la série de terme général u_n converge absolument, donc converge.

b) On a

$$u_n = (-1)^n \sin \frac{a\pi}{n}\,.$$

Si $a = 0$, on a $u_n = 0$ et la série de terme général u_n converge (absolument).

Remarquons que si l'on change a en $-a$ dans l'expression de u_n, le signe de u_n change, donc le comportement de la série ne changera pas. On peut se contenter d'étudier le cas $a > 0$. Alors

$$|u_n| = \left|\sin \frac{a\pi}{n}\right|\,.$$

Puisque l'on a au voisinage de 0,

$$\sin u \sim u\,,$$

on en déduit que

$$|u_n| \sim \frac{a\pi}{n}\,.$$

Comme la série de Riemann de terme général $1/n$ diverge, il en résulte que la série de terme général $|u_n|$ diverge, c'est-à-dire que la série de terme général u_n ne converge pas absolument.

Posons

$$f(x) = \sin(a\pi x)\,.$$

On a

$$f'(x) = a\pi \cos(a\pi x)\,.$$

et $f'(x)$ est positive sur l'intervalle $[\,0,\, 1/2a\,]$, donc la suite $(\sin \frac{a\pi}{n})$ est décroissante dès que $n > 2a$. De plus elle converge vers 0. Alors il résulte du critère de Leibniz que la série de terme général u_n converge. Elle est donc semi-convergente.

c) Rappelons que le produit de la suite $((-1)^n)$ qui est bornée, par une suite qui converge vers zéro, converge également vers zéro.

Si $a < 0$, on a

$$u_n = \frac{1}{1 + (-1)^n n^a}\,,$$

et puisque la suite $((-1)^n n^a)$ converge vers 0, la suite (u_n) converge vers 1, donc la série de terme général u_n diverge.

Si $a > 0$, on a, si $n \geq 2$,

$$|u_n| = \frac{1}{n^a + (-1)^n} = \frac{1}{n^a}\,\frac{1}{1 + \dfrac{(-1)^n}{n}}\,,$$

et puisque la suite $((-1)^n/n)$ converge vers 0, on en déduit que

$$|u_n| \sim \frac{1}{n^a}\,.$$

Par comparaison à une série de Riemann, on en déduit que la série de terme général $|u_n|$ converge, c'est-à-dire que la série de terme général u_n converge absolument, si et seulement si $a > 1$.

Etudions le cas où $0 < a \leq 1$. On écrit

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^a} \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{n^a}} .$$

Comme la suite $((-1)^n/n^a)$ converge vers 0, on peut utiliser un développement limité de $1/(1+u)$ en 0, et on obtient

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^a} \left(1 - \frac{(-1)^n}{n^a} + \circ\left(\frac{(-1)^n}{n^a}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{n^a} - \frac{1}{n^{2a}} + \circ\left(\frac{1}{n^{2a}}\right) .$$

Posons

$$v_n = \frac{(-1)^n}{n^a} \quad \text{et} \quad w_n = -\frac{1}{n^{2a}} + \circ\left(\frac{1}{n^{2a}}\right) .$$

La série de terme général v_n converge d'après le critère de Leibniz. Par ailleurs

$$w_n \sim -\frac{1}{n^{2a}} .$$

Or la série de terme général $-1/n^{2a}$ est une série de Riemann négative qui converge si et seulement si $2a > 1$ c'est-à-dire $a > 1/2$, donc la série de terme général w_n converge si et seulement si $a > 1/2$. On a alors les deux cas suivants :

si $1/2 < a \leq 1$, la série de terme général u_n est la somme de deux séries convergentes. Elle converge mais n'est pas absolument convergente : elle est semi-convergente.

si $0 < a \leq 1/2$, la série de terme général u_n est la somme d'une série convergente et d'une série divergente : elle diverge donc.

d) Si l'on pose

$$w_n = \cos(an + b) \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{n^\alpha} ,$$

on voit déjà que la suite (v_n) décroit et converge vers 0, si $\alpha > 0$.

Pour calculer la somme $w_n + \cdots + w_m$, on considère w_n comme la partie réelle de $e^{i(an+b]}$, et l'on calcule

$$e^{i(an+b)} + e^{i(a(n+1)+b)} + \cdots + e^{i(am+b)} = e^{i(an+b)} \left(1 + e^{ia} + \cdots + e^{i(m-n)a}\right) .$$

On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison e^{ia}. Cette raison n'est pas égale à 1, puisque $a \neq 2k\pi$, donc

$$1 + e^{ia} + \cdots + e^{i(m-n)a} = \frac{1 - e^{i(m-n+1)a}}{1 - e^{ia}} ,$$

d'où

$$|e^{i(an+b)} + e^{i(a(n+1)+b)} + \cdots + e^{i(am+b)}| = \frac{|1 - e^{i(m-n+1)a}|}{|1 - e^{ia}|} .$$

Mais

$$|1 - e^{i(m-n+1)a}| \leq 1 + |e^{i(m-n+1)a}| = 2 ,$$

donc
$$|e^{i(an+b)}+e^{i(a(n+1)+b)}+\cdots+e^{i(am+b)}|\leq \frac{2}{|1-e^{ia}|}=M\,.$$
Alors, puisque la valeur absolue de la partie réelle d'un nombre complexe est inférieure à son module, on obtient
$$|w_n+\cdots+w_m|\leq |e^{i(an+b)}+e^{i(a(n+1)+b)}+\cdots+e^{i(am+b)}|\,,$$
et finalement
$$|w_n+\cdots+w_m|\leq M\,.$$
On peut donc appliquer le critère d'Abel et la série de terme général v_nw_n converge.

Etudions maintenant la convergence absolue.

Si $\alpha>1$, on a en fait
$$|u_n|\leq \frac{1}{n^\alpha}\,,$$
et la convergence est absolue.

Dans le cas où $0<\alpha\leq 1$, on écrit
$$\frac{|\cos(an+b)|}{n^\alpha}\geq \frac{\cos^2(an+b)}{n^\alpha}=\frac{1+\cos(2an+2b)}{2n^\alpha}\,.$$
Si $a\neq k\pi$, la série de terme général $\cos(2an+2b)/n^\alpha$ converge, et la série dont le terme général est le membre de droite, est la somme d'une série divergente positive $1/n^\alpha$ et d'une série convergente. La suite des sommes partielles a pour limite $+\infty$. Alors il en est de même de la suite des sommes partielles de la série dont le terme général est le membre de gauche.

Si $a=k\pi$,
$$\frac{|\cos(an+b)|}{n^\alpha}=\frac{|\cos b|}{n^\alpha}\,,$$
et la série diverge également.

En résumé, si $0<\alpha\leq 1$, la série de terme général u_n est semi-convergente.

e) On a, si $n\geq 2$,
$$|u_n|=\frac{1}{n+2\sin n}=\frac{1}{n}\,\frac{1}{1+\dfrac{2\sin n}{n}}\,,$$
et puisque la suite $(2\sin n)$ est bornée et que la suite $(1/n)$ converge vers 0, la suite $(\sin n/n)$ converge aussi vers 0, donc
$$|u_n|\sim\frac{1}{n}\,,$$
et la série de terme général $|u_n|$ diverge par comparaison à la série harmonique. La série de terme général u_n n'est donc pas absolument convergente.

Partons de l'égalité
$$u_n=\frac{(-1)^n}{n}\,\frac{1}{1+\dfrac{2\sin n}{n}}\,.$$

Comme la suite $(\sin n/n)$ converge vers 0, on peut utiliser un développement limité de $1/(1+u)$ en 0, et on obtient

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n}\left(1 - \frac{2\sin n}{n} + \circ\left(\frac{2\sin n}{n}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{2(-1)^n \sin n}{n^2} + \circ\left(\frac{2(-1)^n \sin n}{n^2}\right).$$

Posons

$$v_n = \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{et} \quad w_n = -\frac{2(-1)^n \sin n}{n^2} + \circ\left(\frac{2(-1)^n \sin n}{n^2}\right).$$

La série de terme général v_n converge d'après le critère de Leibniz. Par ailleurs

$$w_n \sim -\frac{2(-1)^n \sin n}{n^2},$$

donc

$$|w_n| \sim \frac{2|\sin n|}{n^2} \leq \frac{2}{n^2},$$

et la série de terme général $|w_n|$ converge par comparaison à la série de Riemann de terme général $2/n^2$. Il en résulte que la série de terme général w_n converge. Alors la série de terme général u_n est la somme de deux séries convergentes. Elle converge donc et c'est une série semi-convergente.

f) On a aussi

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}+n},$$

et donc

$$|u_n| = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} = \frac{1}{n}\,\frac{1}{1+\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}} \sim \frac{1}{2n}.$$

La série de terme général $|u_n|$ diverge par comparaison à la série harmonique.

Mais la suite $1/(\sqrt{n^2+1}+n)$ est une suite décroissante qui converge vers 0, donc la séries de terme général u_n converge d'après le critère de Leibniz. Il en résulte que cette série est semi-convergente.

g) Puisque la suite $(\cos n)$ est bornée, et que la suite $(1/\sqrt{n})$ converge vers 0, la suite $(\cos n/\sqrt{n})$ converge vers 0, et on peut utiliser un développement limité de $\ln(1+u)$ en 0.

$$u_n = \frac{\cos n}{\sqrt{n}} - \frac{\cos^2 n}{2n} + \circ\left(\frac{\cos^2 n}{n}\right).$$

Posons

$$v_n = \frac{\cos n}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad w_n = -\frac{\cos^2 n}{2n} + \circ\left(\frac{\cos^2 n}{n}\right).$$

La série de terme général v_n converge. D'autre part

$$w_n \sim -\frac{\cos^2 n}{2n} = -\left(\frac{1}{4n} + \frac{\cos 2n}{4n}\right).$$

Or la série de terme général $1/(4n)$ diverge, et la série de terme général $\cos(2n)/(4n)$ converge d'après d), donc la série de terme général w_n diverge. Alors la série de terme général u_n diverge, donc elle ne converge pas absolument.

h) On a
$$|u_n| \leq \frac{|\sin 2n|}{n^2-n+1} \leq \frac{1}{n^2-n+1} \sim \frac{1}{n^2}\,,$$
donc la série de terme général u_n converge absolument par comparaison à la série de Riemann de terme général $1/n^2$.

11. a) On peut écrire en mettant $n^{3/2}$ en facteur,
$$u_n = n^{3/2}\left[\lambda\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{3/2}\right)+\frac{\mu}{n}\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{1/2}\right)-\frac{1}{n}\right].$$
On fait un développement limité à l'ordre 3 de $n^{-3/2}u_n$ par rapport à la variable $1/n$. On a
$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{3/2} = 1-\frac{3}{2}\,\frac{1}{n}+\frac{3}{8}\,\frac{1}{n^2}+\frac{1}{16}\,\frac{1}{n^3}+\circ\left(\frac{1}{n^3}\right)\,,$$
et
$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{1/2} = 1-\frac{1}{2}\,\frac{1}{n}-\frac{1}{8}\,\frac{1}{n^2}+\circ\left(\frac{1}{n^2}\right)\,,$$
d'où, en remplaçant
$$n^{-3/2}u_n = \left(\frac{3}{2}\,\lambda-1\right)\frac{1}{n}+\left(-\frac{3}{8}\,\lambda+\frac{1}{2}\,\mu\right)\frac{1}{n^2}+\left(-\frac{1}{16}\,\lambda+\frac{1}{8}\,\mu\right)\frac{1}{n^3}+\circ\left(\frac{1}{n^3}\right).$$
Si $\lambda \neq 2/3$, on a
$$u_n \sim \left(\frac{3}{2}\,\lambda-1\right)\sqrt{n}\,,$$
et la série de terme général u_n diverge puisque le terme général ne tend pas vers 0.

Si $\lambda = 2/3$ et $\mu \neq 1/2$, on a
$$u_n \sim \left(\frac{\mu}{2}-\frac{1}{4}\right)\frac{1}{\sqrt{n}}\,,$$
et la série de terme général u_n diverge par comparaison à une série de Riemann divergente.

Si $\lambda = 2/3$ et $\mu = 1/2$, on a
$$u_n \sim \frac{1}{48}\,\frac{1}{n^{3/2}}\,,$$
et la série de terme général u_n converge par comparaison à une série de Riemann convergente.

b) Dans ce dernier cas, notons S la somme de la série et R_n le reste d'ordre n. On a donc
$$\sum_{k=1}^{n} u_k = S - R_n\,,$$
et la suite (R_n) converge vers 0.

En calculant les sommes partielles, on obtient, en utilisant le procédé télescopique,

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{2}{3}\,n^{3/2} + \frac{1}{2}\,n^{1/2} - \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}\,.$$

Donc

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} = \frac{2}{3}\,n^{3/2} + \frac{1}{2}\,n^{1/2} - (S - R_n)\,,$$

c'est-à-dire

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} = \frac{2}{3}\,n^{3/2} + \frac{1}{2}\,n^{1/2} - S + \circ(1)\,,$$

ce qui donne la formule voulue.

12. a) De l'inégalité

$$u_n - 2\sqrt{u_n}\sqrt{v_n} + v_n = (\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})^2 \geq 0\,,$$

on déduit

$$\sqrt{u_n v_n} \leq \frac{1}{2}\,(u_n + v_n)\,.$$

Puisque la série de terme général $u_n + v_n$ converge comme somme de deux séries convergentes, on en déduit que la série de terme général $\sqrt{u_n v_n}$ converge aussi.

b) En appliquant ce qui précède à $v_n = 1/n^2$, qui est le terme général d'une série convergente, on en déduit que la série de terme général $\sqrt{u_n}/n$ converge.

c) Puisque la série de terme général v_n converge, la suite (v_n) converge vers 0, et donc $w_n \sim u_n$. Il en résulte que la série de terme général w_n converge.

d) Puisque la série de terme général u_n converge, la suite (u_n) converge vers 0, et donc à partir d'un certain rang $u_n \leq 1$. Il en résulte $u_n^2 \leq u_n$ et la série de terme général w_n converge.

13. a) On a

$$e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}\,,$$

donc

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \geq \frac{1}{(n+1)!} > 0\,.$$

D'autre part

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n!}{k!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\cdots k}\,.$$

Mais, si $k \geq n+2$, on a $k > n+1$, et

$$(n+1)\cdots k > (n+1)\cdots(n+1) = (n+1)^{k-n}\,,$$

puisqu'il y a $k-n$ facteurs dans ce produit, donc

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} < \frac{1}{n!} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{k-n}}\,,$$

ce que l'on peut encore écrire

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} < \frac{1}{n!}\frac{1}{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{k-n-1}}\,.$$

Mais on reconnaît alors la somme de la série géométrique de raison $1/(n+1)$.

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{k-n-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{k}} = \frac{1}{1-\dfrac{1}{n+1}} = \frac{n+1}{n}\,.$$

Finalement

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} < \frac{1}{n!}\,\frac{1}{n}\,.$$

On a donc bien obtenu les inégalités

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < e < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n\cdot n!}\,.$$

b) Tout d'abord, en prenant $n=1$ dans (1), on trouve

$$2 < e < 3\,,$$

et e n'est donc pas entier. Supposons que e soit rationnel. Il s'écrirait $e = a/q$ evec $a > 0$ et $q > 1$ entiers. Alors

$$\sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} < \frac{a}{q} < \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} + \frac{1}{q\cdot q!}\,.$$

En multipliant ces inégalités par $q!$ on obtient

$$\sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} < a(q-1)! < \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} + \frac{1}{q}\,.$$

Mais

$$\alpha = \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} = 1 + \sum_{k=0}^{q-1} (k+1)\cdots q\,,$$

est un nombre entier. Alors

$$0 < a(q-1)! - \alpha < \frac{1}{q} < 1\,,$$

et $a(q-1)! - \alpha$ serait un entier de l'intervalle $]\,0,\,1\,[$ ce qui est impossible. On a donc une contradiction et e est irrationnel.

14. a) On écrit

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} = \sum_{k=0}^{n-2} (k+1)\cdots(n-1)n + n + 1\,.$$

La somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-2}(k+1)\cdots(n-1)n$ est divisible par le produit $(n-1)n$ qui est un nombre pair, donc A_n a la même parité que $n+1$. Il en résulte que A_n est pair si n est impair, et impair si n est pair.

b) En multipliant les inégalités (1) par $\pi n!$, on trouve

$$\pi A_n < n!\pi e < \pi A_n + \frac{\pi}{n}\,,$$

donc

$$0 < n!\pi e - \pi A_n < \frac{\pi}{n}\,.$$

D'autre part

$$0 \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2}\,,$$

donc

$$0 < n!\pi e - \pi A_n < \frac{\pi}{n+1} + \frac{\pi}{n^2}\,.$$

On en déduit que

$$n!\pi e = \pi A_n + \frac{\pi}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\,.$$

c) Alors

$$u_n = \sin(n!\pi e) = \sin\left(\pi A_n + \frac{\pi}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = (-1)^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\,.$$

Tout d'abord

$$|u_n| = \left|\sin\left(\frac{\pi}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right| \sim \frac{\pi}{n}\,,$$

et cette série ne converge pas, donc u_n n'est pas absolument convergente.

D'autre part, d'après la formule des accroissements finis, il existe c tel que

$$|\sin(a+b) - \sin a| = |b||\cos c| \leq |b|\,,$$

donc

$$\sin(a+b) = \sin a + O(b)\,.$$

Alors

$$\sin\left(\frac{1}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \sin\left(\frac{1}{n+1}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\,.$$

Finalement

$$u_n = (-1)^{n+1}\sin\left(\frac{1}{n+1}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\,.$$

La série de terme général $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge absolument. D'autre part la suite $\left(\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)$ est décroissante et converge vers 0. La série alternée de terme général $(-1)^{n+1}\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)$ converge donc. Il en résulte que la série de terme général u_n converge. Elle est bien semi-convergente.

15. On a

$$\sum_{k=0}^{m} u_k = \int_0^1 \sum_{k=0}^{m} (1-\sqrt{x})^k \, dx \, .$$

Mais, si $x \neq 0$,

$$\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{m} (1-\sqrt{x})^k\right) dx = \int_0^1 \frac{1-(1-\sqrt{x})^{m+1}}{1-(1-\sqrt{x})} \, dx = \int_0^1 \frac{1-(1-\sqrt{x})^{m+1}}{\sqrt{x}} \, dx \, .$$

En effectuant le changement de variable $u = \sqrt{x}$, on a $du = dx/(2\sqrt{x})$, et

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m} u_k &= \int_0^1 (1-(1-u)^{m+1})\, 2du \\ &= 2\left[u + \frac{(1-u)^{m+2}}{m+2}\right]_0^1 \\ &= 2 - \frac{2}{m+2} \, . \end{aligned}$$

Comme cette suite converge vers 2, on en déduit que la série de terme général u_n converge, et que

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \lim_{m\to+\infty} \sum_{k=0}^{m} u_k = 2 \, .$$

16. *Cas réel.*

Montrons tout d'abord les propriétés dans le cas où P et Q sont dans $\mathbb{R}[X]$.

a) Si $a_p X^p$ est le terme de plus haut degré de P et $b_q X^q$ celui de Q, on a alors

$$\frac{P(n)}{Q(n)} \sim \frac{a_p}{b_q} \frac{1}{n^{q-p}} \, ,$$

et il résulte du critère de Riemann que cette série converge si et seulement si $q - p \geq 2$.

b) Pour que la série converge, il faut déjà que le terme général tende vers 0. Or

$$\frac{P(n)}{Q(n)} \sim \frac{a_p}{b_q} \frac{1}{n^{q-p}} \, ,$$

et cette expression tend vers zéro si et seulement si $q > p$, soit $q \geq p+1$, donc, pour que la série converge, il faut que $q \geq p+1$.

Supposons maintenant cette condition satisfaite. Calculons la dérivée de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}\,.$$

On a

$$f'(x) = \frac{Q(x)P'(x) - P(x)Q'(x)}{Q(x)^2}\,.$$

Le numérateur est un polynôme. Si ce n'est pas le polynôme 0, il est équivalent à son terme de plus haut degré et donc de signe constant pour x assez grand. Il en résulte que f est monotone sur un intervalle $[\,a,\, +\infty\,[$, et donc que la suite (u_n) est monotone à partir d'un certain rang. Le critère des séries alternées montre que la série de terme général (u_n) converge.

Si le numérateur de la fraction est le polynome zéro, c'est que f est constante, donc que $P(x) = \lambda Q(x)$. Mais comme $q \geq p+1$, on ne peut avoir $q = p$, ce qui implique que $\lambda = 0$, donc $P = 0$, et alors la série est nulle et converge également.

La condition $q \geq p+1$ est donc suffisante pour avoir la convergence.

Cas complexe.

Si l'on suppose maintenant les polynômes à coefficients complexes, on peut écrire

$$P = P_1 + iP_2 \quad \text{et} \quad Q = Q_1 + iQ_2\,,$$

avec P_1, P_2, Q_1, Q_2 dans $\mathbb{R}[X]$. Un des polynômes P_1 et P_2 au moins est de degré p, et un des polynômes Q_1 et Q_2 au moins est de degré q. Alors

$$\frac{P}{Q} = \frac{P_1 + iP_2}{Q_1 + iQ_2}\,,$$

et, en rendant le dénominateur réel,

$$\frac{P}{Q} = \frac{(P_1 + iP_2)(Q_1 - iQ_2)}{Q_1^2 + Q_2^2} = \frac{P_1Q_1 + P_2Q_2}{Q_1^2 + Q_2^2} + i\,\frac{P_2Q_1 - P_1Q_2}{Q_1^2 + Q_2^2}\,.$$

Un au moins des polynômes Q_1 et Q_2 est de degré q. Alors le degré du dénominateur $C = Q_1^2 + Q_2^2$ vaut au plus $2q$, mais les termes de plus haut degré de Q_1^2 et Q_2^2 étant positifs, le degré de C vaut exactement $2q$.

Les polynômes $P_1Q_1 + P_2Q_2$ et $P_2Q_1 - P_1Q_2$ sont de degré $p+q$ au plus, et un des deux au moins est exactement de degré $p+q$, sinon la fraction P/Q serait de degré plus petit que $(p+q) - 2q = p - q$ ce qui est faux.

Cela signifie que un au moins des polynômes $A = P_1Q_1 + P_2Q_2$ et $B = P_2Q_1 - P_1Q_2$ est de degré $p+q$, et l'autre de degré au plus $p+q$. On peut alors appliquer les résultats obtenus dans le cas réel.

a) si $q \geq p+2$, alors $2q \geq p+q+2$, donc les séries de termes généraux $\dfrac{A(n)}{C(n)}$ et $\dfrac{B(n)}{C(n)}$ convergent toutes les deux. Alors la série de terme général u_n converge.

Si $q < p+2$, alors $2q < p+q+2$, donc une des deux séries de termes généraux $\dfrac{A(n)}{C(n)}$ et $\dfrac{B(n)}{C(n)}$ diverge. Alors la série de terme général u_n diverge.

b) si $q \geq p+1$, alors $2q \geq p+q+1$, donc les séries de termes généraux $(-1)^n\dfrac{A(n)}{C(n)}$ et $(-1)^n\dfrac{B(n)}{C(n)}$ convergent toutes les deux. Alors la série de terme général $(-1)^n u_n$ converge.

Si $q < p+1$, alors $2q < p+q+1$, donc une des deux séries de termes généraux $(-1)^n\dfrac{A(n)}{C(n)}$ et $(-1)^n\dfrac{B(n)}{C(n)}$ diverge. Alors la série de terme général $(-1)^n u_n$ diverge.

17. On peut appliquer le critère des séries alternées, puisque la suite $(1/(3n+1))$ décroit et tend vers 0. La série converge donc.

En utilisant la somme des termes d'une suite géométrique, on obtient

$$\frac{1}{1+x^3} = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k x^{3k} + \frac{(-1)^n x^{3n}}{1+x^3}\,,$$

donc en intégrant

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{3k+1} + (-1)^n\int_0^1 \frac{x^{3n}}{1+x^3}\,dx\,.$$

En appliquant la première formule de la moyenne, il existe c_n dans $[\,0,\,1\,]$ tel que

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{3n}}{1+x^3}\,dx = \frac{1}{1+c_n^3}\int_0^1 x^{3n}\,dx = \frac{1}{1+c_n^3}\,\frac{1}{1+3n} \leq \frac{1}{1+3n}\,.$$

Il résulte du théorème d'encadrement que la suite de terme général $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{3n}}{1+x^3}\,dx$ converge et a pour limite 0. Alors

$$\lim_{n\to+\infty}(-1)^n\int_0^1 \frac{x^{3n}}{1+x^3}\,dx = 0\,,$$

et

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k+1} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}\,,$$

c'est-à-dire

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+1} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}\,.$$