EXERCICES SUR LES SERIES

SERIES NUMERIQUES

1. Calculer la somme des séries dont le terme général u_n est donné ci-dessous.

$$a) \quad u_n = \ln \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \ (n \geq 1) \quad , \quad b) \quad u_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \ (n \geq 0) \quad , \quad c) \quad u_n = \frac{3^n}{7^{n-2}} \ (n \geq 2)$$

$$d) \quad u_n = \ln(1 + x^{2^n}) \ (0 < x < 1 \, , \ n \geq 0) \quad , \quad e) \quad u_n = \frac{3}{(3n+1)(3n+4)} \ (n \geq 0)$$

2. Etudier la nature des séries dont le terme général u_n est donné ci-dessous (comparaison à une série géométrique).

$$a) \quad u_n = \frac{3^n + n^4}{5^n - 3^n} \quad , \quad b) \quad u_n = \frac{\operatorname{ch}(2n)}{\operatorname{ch}(3n)} \quad , \quad c) \quad u_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right)^n$$

$$d) \quad u_n = \operatorname{th}(n+a) - \operatorname{th} n \ (a \in \mathbb{R}) \quad , \quad e) \quad u_n = (3 + (-1)^n)^{-n} \quad , \quad f) \quad u_n = \frac{1}{1 + x^{2n}} \ (x \in \mathbb{R})$$

3. Etudier la nature des séries dont le terme général u_n est donné ci-dessous (comparaison à une série de Riemann).

$$a) \quad u_n = 1 - \cos \frac{1}{n} \quad , \quad b) \quad u_n = \sqrt[n]{\frac{n}{n+1}} - 1 \quad , \quad c) \quad u_n = n^{-1-2/n}$$

$$d) \quad u_n = e^{\cos(1/n)} - e^{\cos(2/n)} \quad , \quad e) \quad u_n = x^{\ln n} \ (x > 0) \quad , \quad f) \quad u_n = n^2 \, a^{\sqrt{n}} \ (a > 0)$$

4. Etudier la nature des séries dont le terme général u_n est donné ci-dessous (règles de Cauchy et de d'Alembert).

$$a) \quad u_n = \frac{n!}{a^n} \ (a > 0) \quad , \quad b) \quad u_n = \frac{n!}{n^n} \quad , \quad c) \quad u_n = \frac{a^n}{n^a} \ (a > 0) \quad , \quad d) \quad u_n = \left(a + \frac{1}{n}\right)^n \ (a > 0)$$

$$e) \quad u_n = \frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)} \ (a > 0) \quad , \quad f) \quad u_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n^2} \ (x \in \mathbb{R}) \quad , \quad g) \quad u_n = \left(\frac{\sin^2 n}{n}\right)^n$$

5. Etudier la nature des séries dont le terme général u_n est donné ci-dessous (comparaison à une série de Bertrand).

$$a) \quad u_n = (1 - e^{1/n^2})\sqrt{\ln n} \quad , \quad b) \quad u_n = \frac{1}{\ln n!} \quad , \quad c) \quad u_n = n^{n^{-a}} - 1 \ (a > 0)$$

6. Etudier la nature des séries dont le terme général u_n est donné ci-dessous.

a) $\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$ *b)* $\dfrac{(n!)^2}{2^{n^2}}$ *c)* $\dfrac{n^2}{n^3+1}$

d) $\dfrac{1}{(\ln n)^n}$ *e)* $\dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ *f)* $\dfrac{1}{\ln(n^2+n+1)}$

g) $\dfrac{n^2}{(1+\delta)^n}$ $(|\delta| < 1/2)$ *h)* $\dfrac{1+2+\cdots+n}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$ *i)* $\dfrac{a^n+1}{a^{2n}+n}$ $(a > 0)$

j) $2^{-\sqrt{n}}$ *k)* $\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$ *l)* $e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+a}}$ $(a > 0)$

7. Etudier la nature de la série dont le terme général u_n est donné par

$$u_n = f\left(a + \frac{1}{n}\right) + f\left(a - \frac{1}{n}\right) - 2f(a)$$

où f est une fonction de classe C^2 au voisinage de a.

8. Déterminer l'ensemble des triplets (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$ pour lesquels la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{an+b} - \frac{c}{n}$$

soit convergente.

9. Déterminer l'ensemble des couples (a, b) de $\mathbb{R}^2$ pour lesquels la série de terme général

$$u_n = \frac{2^n + a^n}{2^n + b^n}$$

soit convergente.

10. Etudier la convergence et la convergence absolue des séries dont le terme général u_n est donné ci-dessous (critères de Leibniz et d'Abel).

a) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n} \arctan \dfrac{1}{n}$, *b)* $u_n = \sin\left(\left(n + \dfrac{a}{n}\right)\pi\right)$ $(a \in \mathbb{R})$, *c)* $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n}$ $(a \neq 0)$

d) $u_n = \dfrac{\cos(an+b)}{n^\alpha}$ $(\alpha > 0 \quad \text{et} \quad a \neq 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}))$, *e)* $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n + 2\sin n}$

f) $u_n = (-1)^n(\sqrt{n^2+1} - n)$, *g)* $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{\cos n}{\sqrt{n}}\right)$, *h)* $u_n = \dfrac{\sin 2n}{n^2 - n + 1}$

11. Soit $n \geq 1$, λ et μ deux réels. On pose

$$u_n = \lambda(n^{3/2} - (n-1)^{3/2}) + \mu(n^{1/2} - (n-1)^{1/2}) - n^{1/2}\,.$$

a) Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

b) En déduire qu'il existe trois réels a, b, c tels que

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} = an^{3/2} + bn^{1/2} + c + \circ(1)\,.$$

12. Soit deux séries positives convergentes de terme généraux u_n et v_n. Quelle est la nature de la série dont le terme général w_n est donné ci-dessous ?

$$a) \quad w_n = \sqrt{u_n v_n} \quad , \quad b) \quad w_n = \frac{\sqrt{u_n}}{n} \quad , \quad c) \quad w_n = \frac{u_n}{1 - v_n} \quad , \quad d) \quad w_n = u_n^2$$

13. On pose $e = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$.

a) Montrer que pour tout entier $n > 0$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < e < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n \cdot n!}\,. \tag{1}$$

b) En déduire que e est irrationnel. (Si $e = a/q$, appliquer la formule (1) avec $n = q$).

14. On pose $u_n = \sin(n!\pi e)$.

a) Quelle est la parité du nombre entier $A_n = n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$?

b) A l'aide de la formule (1) de l'exercice précédant, établir que

$$n!\pi e = \pi A_n + \frac{\pi}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\,.$$

c) En déduire que la série de terme général u_n est semi-convergente.

15. Montrer que la série de terme général

$$u_n = \int_0^1 (1 - \sqrt{x})^n \, dx$$

est convergente.

16. Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ de degré p et q respectivement, avec Q non identiquement nul. Si n n'est pas racine de Q, on pose

$$u_n = \frac{P(n)}{Q(n)}\,.$$

Montrer que

a) la série de terme général u_n converge si et seulement si $q \geq p+2$,

b) la série de terme général $(-1)^n u_n$ converge si et seulement si $q \geq p+1$.

17. Montrer que la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{3n+1}$ converge et que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^3}\,.$$

18. Soit $\alpha \neq 0$. Etudier la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^a + (-1)^{n+1}}\,.$$

19. Construire deux séries de termes géneraux u_n et v_n, l'une convergente, l'autre divergente, telles que $u_n \sim v_n$.

20. Démontrer la règle de Cauchy : soit $u_n \geq 0$, on suppose que

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell\,,$$

alors, si $0 \leq \ell < 1$ la série de terme général u_n converge. Que se passe-t-il si $\ell > 1$, ou si $\ell = 1^+$?

21. Etudier la convergence de la série dont le terme général est défini par

$$u_{2p} = \left(\frac{2}{3}\right)^p \quad \text{et} \quad u_{2p+1} = 2\left(\frac{2}{3}\right)^p$$

par la régle de Cauchy et par la règle de l'Alembert.

22. Soit $u_n > 0$. On pose

$$v_n = \frac{u_n}{1+u_n} \quad \text{et} \quad w_n = \frac{u_n}{1+u_n^2}\,.$$

a) Montrer que les séries de terme généraux u_n et v_n sont de même nature.

b) Comparer la convergence des séries de termes généraux u_n et w_n

23. Soit le polynôme de degré k

$$P_k(X) = X(X-1)\cdots(X-(k-1))\,.$$

a) Calculer

$$\sigma_k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_k(n)}{n!}\,.$$

b) En déduire que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3+n^2+n+1}{n!} = 9e\,.$$

24. Déterminer un entier n tel que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > 10^5\,.$$

25. Montrer par le critère de Cauchy que la série de terme général $\dfrac{\cos \ln n}{n}$ diverge. *(difficile)*

SERIES DE FONCTIONS

26. Etudier la convergence simple, uniforme et normale, des séries de fonctions u_n définies sur $[\,0,\,1\,]$ dont le terme général est donné ci-dessous.

$a)\quad u_n(x) = \dfrac{1}{n+xn^2}\quad,\quad b)\quad u_n(x) = \dfrac{(-1)^n \arctan(nx)}{1+nx}\quad,\quad c)\quad u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{nx+\sqrt{n}}$

$d)\quad u_n(x) = x^n(1-x)\quad,\quad e)\quad u_n(x) = (-1)^n x^n(1-x)\quad,\quad f)\quad u_n(x) = \dfrac{\arctan(nx)}{n^2}$

27. Lorsque $a>0$, $n\geq 0$ et $x\geq 0$, on pose

$$f_n(x) = x^a e^{-nx}\,.$$

a) Calculer la somme de la série de terme général $f_n(x)$.

b) Montrer que l'on a convergence normale si $a>1$.

c) Montrer que l'on n'a pas convergence uniforme si $a\leq 1$.

d) Montrer que l'on a convergence uniforme sur tout intervalle $[\,s,\,+\infty\,[$, où $s>0$.

28. Soit u_n la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par

$$u_n(x) = \frac{1}{n^2 x + n^3}\,.$$

Montrer que la série de fonctions de terme général u_n converge uniformément sur $[0, +\infty[$ vers une fonction f indéfiniment dérivable.

29. Pour $x \geq 0$ on pose

$$f_n(x) = (-1)^n \frac{\sin(x+n)}{x+n}\,.$$

Montrer que la série de terme général f_n converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

30. Pour tout x réel on pose

$$u_n(x) = -2n^2 x e^{-n^2 x^2}\,.$$

a) Montrer que la série de terme général

$$v_n(x) = u_n(x) - u_{n+1}(x)$$

converge et calculer la somme

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)\,.$$

b) Soit $a > 0$. Montrer que la série de terme général

$$w_n = \int_0^a v_n(t)\,dt$$

converge et calculer sa somme.

c) Calculer $\displaystyle\int_0^a S(t)\,dt$.

d) En déduire que la série de terme général $u_n - u_{n+1}$ ne converge pas uniformément sur $[0, a]$.