

Liste d'exercices : « DENOMBREMENTS »

EX 9

On lance 4 fois de suite un dé ordinaire à 6 faces équilibré.
Calculer la probabilité des événements suivants :

E_1 : "obtenir 4 fois un "6" ", E_2 : "obtenir 4 fois le même chiffre", E_3 : "obtenir 4 chiffres différents"

E_4 : "obtenir 4 chiffres différents dans l'ordre croissant"

E_5 : "lors des 4 lancers on a obtenu exactement les chiffres 1, 2 et 3"

E_6 : "obtenir exactement 3 chiffres différents"

E_7 : "obtenir exactement 1 fois le chiffre "5" et 3 fois le chiffre "6" "

E_8 : "obtenir exactement 2 fois le chiffre "5" et 2 fois le chiffre "6" "

E_9 : "obtenir exactement les chiffres "5" et "6" lors des 4 lancers"

E_{10} : "obtenir exactement 2 chiffres différents" (2 méthodes pour E_{10} , vérifier que les résultats concordent)

Exercice 9 (Réponses / indications)

Indications : on va définir l'univers en fonction de l'événement

Pour E_1 = « obtenir 4 fois un 6 », on peut modéliser l'univers par la loi Binomiale $B\left(4; \frac{1}{6}\right)$

Et on a $P(X = k) = \binom{4}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{4-k}$ et donc $P(X = 4) = \binom{4}{4} \left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(\frac{5}{6}\right)^0 = \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{1}{6^4}$

Pour E_2 = « obtenir 4 fois le même chiffre »,

On peut modéliser l'univers par la loi Binomiale $B\left(4; \frac{1}{6}\right)$

et calculer la probabilité d'obtenir 4 fois le chiffre 1 et on a

$$P(X = \text{obtenir 4 fois le chiffre 1}) = \left(\frac{1}{6}\right)^4$$

Et donc $P(E_2) = 6 \times \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{6}{6^4} = \frac{1}{6^3}$

$$P(E_3) = \frac{6 \times 5 \times 3 \times 2}{\binom{6}{4}} = \frac{\frac{5}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{3}{6}}{\frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{2 \times 2}} = \frac{\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}}{\frac{6 \times 1 \times 1 \times 1}{2 \times 2}} = \frac{\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}}{\frac{6 \times 1 \times 1 \times 1}{2 \times 2}} = 4 \times \frac{1}{6^4} = \frac{4}{6^4}$$

Pour calculer E_4 on va lister les 4-listes : $1; 2; 3; 4$ et donc $P(E_4) = \frac{6}{6^4} = \frac{1}{6^3}$

$1; 3; 4; 5$

$1; 4; 5; 6$

$2; 3; 4; 5$

$2; 4; 5; 6$

$3; 4; 5; 6$

EX 10

Une urne contient 3 boules bleues numérotées de 1 à 3, 4 boules vertes numérotées de 1 à 4 et 5 boules rouges numérotées de 1 à 5. On tire simultanément 3 boules de cette urne, les tirages étant équiprobables. Calculer la probabilité des événements suivants :

- 1) A : "obtenir au moins une boule portant le numéro 4 "
- 2) B : " obtenir exactement une boule portant le numéro 4 "
- 3) C : " obtenir exactement deux boules vertes "
- 4) D : " obtenir au moins deux boules vertes "
- 5) $E = B \cap C$
- 6) F : "obtenir exactement une boule portant le numéro 4 ou exactement deux boules vertes"
- 7) G : " obtenir au moins une boule portant le numéro 4 ou au moins deux boules vertes "

=> au hasard simultané !

Exercice 10 (Réponses / indications)

Urne avec 12 boules

- 3 boules Bleues B1, B2, B3
- 4 boules Vertes V1, V2, V3, V4
- 4 boules Rouges R1, R2, R3, R4, R5

L'événement contraire de A est notée $\bar{A}$ et c'est l'ensemble des tirages qui ne contiennent aucune boule numérotée 4

$$\text{Et on a } P(\bar{A}) = \frac{\binom{10}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{\frac{10!}{7! \times 3!}}{\frac{12!}{9! \times 3!}} = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{9 \times 8}} = \frac{9 \times 8}{12 \times 11} = \frac{6}{11}$$

$$\text{Et on a } P(B) = \frac{2 \times \binom{10}{2}}{\binom{12}{3}} = \frac{2 \times \frac{10!}{8! \times 2!}}{\frac{12!}{9! \times 3!}} = \frac{\frac{2}{1}}{\frac{1}{9 \times 3}} = \frac{2 \times 9 \times 3}{12 \times 11} = \frac{9}{11}$$

$$P(C) = \frac{\binom{4}{2} \times \binom{8}{2}}{\binom{12}{3}} = \frac{\frac{4!}{2! \times 2!} \times \frac{8!}{6! \times 2!}}{\frac{12!}{9! \times 3!}} = \frac{\frac{6}{1} \times \frac{8 \times 7}{2}}{\frac{1}{3 \times 2}} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 3}{12 \times 11 \times 10} = \frac{2 \times 7 \times 6}{11 \times 10} = \frac{42}{55}$$

L'événement D est l'évènement : « obtenir 2 boules vertes + obtenir 3 boules vertes »

$$P(D) = \frac{\binom{4}{2} \times \binom{8}{2}}{\binom{12}{3}} + \frac{\binom{4}{3} \times \binom{8}{1}}{\binom{12}{3}}$$

$$F = B \cup C \text{ donc } P(F) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$$

$$G = A \cup D \text{ donc } P(G) = P(A) + P(D) - P(A \cap D)$$