

(si possible sans développer les produits):
 $A_n = (X^3 + 3X - 1)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$; $B = (-1 - X + 4X^3)^5(1 - X^3)^2$; $C_n = (X^4 + 2)^n - (X^4 - 2)^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

EX 3

Soit $n \in \mathbb{N}$. Ecrire sous forme développée (en puissances de X) le polynôme $P = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^k (1 - X)^{3n-2k} X^k$

EX 4

- 1) Soient a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 des réels quelconques et P la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
 $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$.
 - a) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients a_k pour que la fonction P soit paire.
 - b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients a_k pour que la fonction P soit impaire.
- 2) Généraliser les résultats pour une fonction polynôme P quelconque de $\mathbb{K}[X]$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, la définition de la parité étant la même pour une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ que pour une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$)

EX 5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Développer et ordonner suivant les puissances croissantes le polynôme $P_n = (1 - X)^2 \sum_{k=1}^n kX^{k-1}$.

En déduire, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, une expression de la somme $S_n(x) = \sum_{k=1}^n kx^{k-1}$.

EX 6

- 1) Si P est un polynôme vérifiant $(*) : \forall x \in \mathbb{R}, P(x) - P(x+1) = x^2$, quel est la valeur minimale de son degré ? Trouver un polynôme P de degré minimal vérifiant $(*)$.
- 2) Retrouver à l'aide de ce polynôme, pour $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de la somme $\sum_{k=1}^n k^2$.