EQUATIONS DIFERENTIELLES LINEAIRES

Exercice 1

On se propose d'intégrer sur l'intervalle le plus grand possible contenu dans $]0,\infty[$ l'équation différentielle :

$$(E) \qquad y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y(x)^2 = -9x^2.$$

1. Déterminer $a \in]0,\infty[$ tel que $y(x) = ax$ soit une solution particulière y_0 de (E).
2. Montrer que le changement de fonction inconnue : $y(x) = y_0(x) - \frac{1}{z(x)}$ transforme l'équation (E) en l'équation différentielle
$$(E_1) \qquad z'(x) + (6x + \frac{1}{x})z(x) = 1.$$
3. Intégrer (E_1) sur $]0,\infty[$.
4. Donner toutes les solutions de (E) définies sur $]0,\infty[$.

Exercice 2

Résoudre l'équation suivante :

$$y'' - 3y' + 2y = e^x.$$

Exercice 3

Résoudre l'équation suivante :

$$y'' - y = -6\cos x + 2x\sin x.$$

Exercice 4

Résoudre l'équation suivante :

$$4y'' + 4y' + 5y = \sin x e^{-x/2}.$$

Exercice 5

On considère l'équation :

$$y'' + 2y' + 4y = xe^x \qquad (E)$$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E).
2. Trouver une solution particulière de (E) (expliquer votre démarche), puis donner l'ensemble de toutes les solutions de (E).
3. Déterminer l'unique solution h de (E) vérifiant $h(0) = 1$ et $h(1) = 0$.
4. Soit $f :]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur $]0,\infty[$ et qui vérifie :
$$t^2 f''(t) + 3t f'(t) + 4f(t) = t\log t.$$
   (a) On pose $g(x) = f(e^x)$, vérifier que g est solution de (E).
   (b) En déduire une expression de f.

Exercice 6

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E.D.) \quad y'' - 4y' + 4y = d(x),$$

où d est une fonction qui sera précisée plus loin.

1. Résoudre l'équation différentielle homogène (ou sans second membre) associée à $(E.D.)$.
2. Trouver une solution particulière de $(E.D.)$ lorsque $d(x) = e^{-2x}$ et lorsque $d(x) = e^{2x}$ respectivement.
3. Donner la forme générale des solutions de $(E.D)$ lorsque
$$d(x) = \frac{e^{-2x} + e^{2x}}{4}.$$

Exercice 7

Résoudre : $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 2x \cos x \cosh x$.

Exercice 8

Déterminer les $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + f(-x) = x \cos x.$$

Exercice 9

En posant $t = \arctan x$, résoudre :

$$y''(x) + \frac{2x}{1+x^2} y'(x) + \frac{y(x)}{(1+x^2)^2} = 0.$$

Exercice 10

Résoudre par le changement de fonction $z = \frac{y}{x}$ l'équation différentielle :

$$x''^2(x) - 2xy'(x) + (2-x^2)y(x) = 0.$$