Exercices sur : LES SOMMES DE RIEMANN

Calculer la limite des 2 suites suivantes

1. $u_n = n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k^2+n^2}$
2. $v_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$

CORRECTION en page 2

AUTRES EXERCICES

Calculer la limite de la somme $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

Calculer la limite (lorsque $n \to +\infty$) de la somme $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{k/n}}{n}$. Idem avec $S'_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{(n+k)^2}$.

CORRECTION

1. Soit
$$u_n = n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k^2+n^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}.$$
En posant $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ nous venons d'écrire la somme de Riemann correspondant à $\int_0^1 f(x)dx$. Cette intégrale se calcule facilement :
$$\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \left[\arctan x\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$
La somme de Riemann u_n convergeant vers $\int_0^1 f(x)dx$ nous venons de montrer que (u_n) converge vers $\frac{\pi}{4}$.

2. Soit $v_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$, notons
$$w_n = \ln v_n = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right).$$

En posant $g(x)=\ln(1+x^2)$ nous reconnaissons la somme de Riemann correspondant à $I=\int_0^1 g(x)dx$. Calculons cette intégrale :
$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 \ln(1+x^2)dx\\
&= \left[x\ln(1+x^2)\right]_0^1 - \int_0^1 x\frac{2x}{1+x^2}dx \quad \text{par intégration par parties}\\
&= \ln 2 - 2\int_0^1 1-\frac{1}{1+x^2}dx\\
&= \ln 2 - 2\left[x-\arctan x\right]_0^1\\
&= \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Nous venons de prouver que $w_n = \ln v_n$ converge vers $I = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$, donc $v_n = \exp w_n$ converge vers $\exp(\ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}) = 2e^{\frac{\pi}{2}-2}$. Bilan (v_n) a pour limite $2e^{\frac{\pi}{2}-2}$.