II. Rappels sur les suites (classe de 1ère S)

2.1) Définition

Soit p un nombre entier naturel.
Une suite numérique est une fonction u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ (ou à partir d'un certain rang p), qui à tout $n \geq p$, fait correspondre son image $u(n)$ qu'on note aussi u_n.

La suite se note $(u_n)_{n \geq p}$ ou simplement (u_n).
u_n s'appelle le *terme de rang n* ou encore le *terme général* de la suite.
$u_p = u(p)$ (ou u_0 si $p=0$) est le *premier terme* ou le *terme initial* de la suite .

2.2) Deux types de définition des suites

Définition des suites type 1 : (suites explicites)

Soit f une fonction définie sur $[a, +\infty[$ où a est un nombre réel positif ou nul.
Si pour tout $n \geq a$, $u_n = f(n)$, le terme général de la suite (u_n) s'écrit en fonction de l'entier n, on dit que (u_n) est une suite définie par une *formule explicite* ou *définie explicitement en fonction de n*. f s'appelle *la fonction associée* à la suite (u_n).

Remarque : Si on a une relation du type $u_n = f(n)$, alors pour tout $n \geq a$, u_n peut être calculé directement à partir de n.

Exemple : Calculer les deux premiers termes, puis u_{10} de la suite définie par : $u_n = \dfrac{6}{n(n-1)}$.

Il est clair que la suite (u_n) est définie à partir de $n = 2$. u_0 et u_1 n'existent pas. Donc :

$$u_2 = \frac{6}{2\times(2-1)} = \frac{6}{2} = 3 \quad ; \quad u_3 = \frac{6}{3\times(3-1)} = \frac{6}{6} = 1 \quad \text{et} \quad u_{10} = \frac{6}{10\times(10-1)} = \frac{6}{90} = \frac{1}{15} .$$

Ici, la fonction associée à cette suite est définie par : $f(x) = \dfrac{6}{x(x-1)}$.

Définition des suites type 2 : (suites récurrentes)

Une *suite récurrente* est une suite définie par la donnée d'un premier terme et une *formule de récurrence* qui permet de calculer chaque terme *en fonction* du terme précédent pas à pas. Autrement dit :

$$\begin{cases} v_0 \in \mathbb{R} \\ v_{n+1} = g(v_n), n \geq 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} v_0 \in \mathbb{R} \\ v_n = g(v_{n-1}), n \geq 1 \end{cases}$$

g s'appelle *la fonction associée* à la suite (v_n) .

Exemple : calculer les deux premiers termes, puis u_{10} de la suite définie par récurrence :

$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n + 10 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = g(v_n) \end{cases}$$ où g est la fonction associée définie par $g(x) = \frac{1}{2}x + 10$.

On a donc $w_1 = \frac{1}{2} \times w_0 + 10 = \frac{1}{2} \times 1 + 10 = \frac{21}{2}$, $w_2 = \frac{1}{2} \times w_1 + 10 = \frac{1}{2} \times \frac{21}{2} + 10 = \frac{61}{4}$

Pour calculer v_{10} , il faut calculer v_9 et tous les termes précédents....

Trop long *pour un calcul à la main ! On peut donc utiliser un tableur ou la calculatrice ou un logiciel de calcul formel.*

2.3) Avec un tableur

Pour calculer les termes d'une suite avec un tableur :

<table>
<tr><th>Suites définies explicitement</th><th>Suites récurrentes</th></tr>
<tr><td>

	A	B
1	0	= u(A1)
2	=A1+1	= u(A2)

Sélectionner A2B2, puis tirer vers le bas, jusqu'à la valeur de n cherchée dans la colonne A. Les termes de la suite sont dans la colonne B.</td><td>

	A	B
1	0	v_0 (donné)
2	=A1+1	= v(B1)

Sélectionner A2B2, puis tirer vers le bas, jusqu'à la valeur de n cherchée dans la colonne A. Les termes de la suite sont dans la colonne B.</td></tr>
</table>

2.4) Avec une calculatrice

Texas : TI82 Stats et modèles sup. ***[E] = Enter [V]=Vert***	***Casio : Graph 35+ et modèles sup.***
Taper sur la touche MODE Sélectionner SEQ ou SUITE Sélectionner Y=, ou *f*(*x*)= , puis : nMin=... Valeur du 1er rang = 0 ou 1 u(n)=..., Expression suite explicite u(nMin)=..., Terme initial à rentrer pour une suite récurrente. [V]TABLE, donne la table des valeurs. ***Les flèches de directions permettent d'obtenir les valeurs suivantes.***	Taper sur la touche MENU Sélectionner RECUR Sélectionner TYPE (F3) an = An+B , Définition explicite an+1=Aan+Bn+C, Suite récurrente an+2 = Aan+1+Ban+..., Suite récurrente du 2ème ordre... Hors pgm Rentrer la formule, puis (F5) SET, détermine début et fin du rang et le terme initial, suites récurrentes. (F6) TABLE, ***donne la table des valeurs.***

Voir Calculatrices & logiciels dynamiques (Très complet ! Merci Xavier Delahaye).

2.5) Avec un algorithme

Soit N un entier donné. Calculer la valeur du N-ème terme de suite récurrente de premier terme $u_0 = 1$ et pour tout entier n : $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+10$.

<table>
<tr><td>
Déclaration de Variables
k un nombre entier
N un nombre entier
U un nombre
Traitement :
Début de l'algorithme
Lire N
Affecter à k la valeur 0
Affecter à U la valeur u_0=1
</td><td>
Pour k allant de 1 à N
    Debut de Pour
    Affecter à U la valeur (1/2)*U +10
    Fin de Pour
Afficher Message « U(»
Afficher N
Afficher Message «)= »
Afficher U
Fin de l'algorithme
</td><td>
En gris, pour l'affichage à l'écran de « U(N)= »
</td></tr>
</table>

III. Sens de variations d'une suite

3.1) Suites croissantes, suites décroissantes

Définition 1 :

1) La suite (u_n) est dite croissante (ssi) pour tout entier n : $u_{n+1} \geqslant u_n$ (ssi) pour tout entier n : $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ (*méthode de la différence*).
2) La suite (u_n) est dite décroissante (ssi) pour tout n : $u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout n : $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ (*méthode de la différence*).
3) La suite (u_n) est dite constante (ou stationnaire) à partir d'un certain rang (ssi) il existe un entier p, tel que pour tout $n \geqslant p$: $u_{n+1} = u_p$.
4) La suite (u_n) est dite monotone (ssi) elle est croissante ou décroissante.

Méthodes *: On peut utiliser des **démonstrations directes** pour des suites explicites ou des démonstrations **par récurrence** pour des suites récurrentes.*

Exemples :

Étudier le sens de variation de la suite (u_n) de terme général : $u_n = 1 + \frac{1}{n}$.

1ère méthode (directe) : Étude du signe de la différence de deux termes consécutifs.

$$u_{n+1} - u_n = \left[1 + \frac{1}{(n+1)}\right] - \left[1 + \frac{1}{n}\right] = 1 + \frac{1}{(n+1)} - 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-(n+1)}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0$$

$u_{n+1} - u_n < 0$ donc $u_{n+1} < u_n$ donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

2ème méthode : Étude du sens de variation de la fonction associée f à la suite (u_n).

Propriété 1. :

Si la suite (u_n) est définie explicitement en fonction de n du type $u_n = f(n)$, la suite (u_n) a le même sens de variations que la fonction associée f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

Exemple : Étudier le sens de variation de la suite (u_n) de terme général : $u_n = 1 + \frac{1}{n}$

La fonction associée f à cette suite est définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$.

La fonction f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$. Donc la fonction associée f est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$. Par conséquent, la suite (u_n) est décroissante, car pour tout entier n :

$n < n+1$ donc $f(n+1) < f(n)$ donc $u_{n+1} < u_n$. CQFD

3ème méthode : Raisonnement par récurrence, voir Fiche-BacS n°1.

3.2) Suites majorées, minorées, bornées

Définitions 1 :

1°) La suite (u_n) est dite ***minorée*** (ssi) Il existe un réel m tel que, pour tout entier n : $u_n \geqslant m$ (ssi) Il existe un réel m tel que, pour tout entier n : $u_n - m \geqslant 0$.

2°) La suite (u_n) est dite ***majorée*** (ssi) Il existe un réel M tel que, pour tout entier n : $u_n \leqslant M$ (ssi) Il existe un réel M tel que, pour tout entier n : $u_n - M \leqslant 0$.

3°) La suite (u_n) est dite ***bornée*** (ssi) Il existe deux nombres réels m et M tels que : pour tout entier entier n : $m \leqslant u_n \leqslant M$.

Méthodes :

On choisira **LA** méthode la plus adaptée.

1°) ***Méthode algébrique*** : On étudie le signe de la différence $u_n - m$ ou $u_n - M$

Exemple : On considère la suite définie, pour tout entier $n \neq 0$, par : $u_n = 1 + \frac{1}{n}$

Montrer que pour tout entier $n \neq 0$: $1 < u_n \leqslant 2$.

2°) ***Méthode de la fonction associée*** : Si la suite est définie d'une manière explicite par une relation du type $u_n = f(n)$, alors la suite a le même comportement que la fonction sur l'intervalle $[0, +\infty[$. On peut étudier le sens de variation (calcul de la dérivée) de la fonction et trouver son minimum et son maximum lorsqu'ils existent.

Exemple : le même exercice que ci-dessus avec la 2ème méthode.

3°) ***Méthode par récurrence :*** Si la suite est récurrente et définie par une relation du type $u_{n+1} = g(u_n)$, u_0 étant donné, alors on utilise, en général, un raisonnement par récurrence.

4°) A ***la calculatrice*** : Afficher les 10 ou 20 premières valeurs, déterminer une valeur « limite inférieure » ou une « limite supérieure », puis essayer de démontrer le résultat par l'une des méthodes précédentes.

5°) Écrire ***un algorithme*** : idem.

IV. Étude de suites particulières (1ère S)

4.1) Suites arithmétiques

Définition 1. :

Soit r un nombre réel donné. On dit que (u_n) est une ***suite arithmétique de raison r***, lorsque $u_0 \in \mathbb{R}$ est donné et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = u_n + r$.

Comment démontrer qu'une suite est arithmétique ?

Il suffit de calculer et de montrer que la différence $u_{n+1} - u_n$ = constante.

Cette constante (indépendante de n) est la raison de la suite arithmétique.

Propriétés :

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. Alors :

(P_1) : Pour tout entier $n \geqslant 0$: $u_n = u_0 + nr$.

(P_2) : Pour tout entier $p \geqslant 0$ et pour tout entier $n \geqslant 0$: $u_n = u_p + (n-p)r$.

(P_3) : Pour tout entier $n \geqslant 0$ et pour tout entier $0 \leqslant p \leqslant n$: $u_p + u_{n-p} = u_0 + u_n$.

(P_4) : Si on appelle S_n la somme des $(n+1)$ premiers termes de la suite (u_n), c'est-à-dire $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$, alors :

$$S_n = \frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2} = \frac{\textit{nombre de termes} \times (\textit{premier} + \textit{dernier terme})}{2}$$

Exemples

1°) Calculer la somme des nombres entiers de 1 à 100, puis de 1 à 1000.

2°) Calculer la somme : S = 7+10+13+16+....+1000.

Théorème :

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

- La suite (u_n) est croissante si et seulement si : ***r* > 0**.
- La suite (u_n) est décroissante si et seulement si : ***r* < 0**.
- La suite (u_n) est constante si et seulement si : ***r* = 0**.

Dans les trois cas, la *représentation graphique* de la suite est un *nuage de points alignés* sur une droite de coefficient directeur r et d'ordonnée à l'origine u_0.

4.2) Suites géométriques

Définition 2. :

Soit q un nombre réel donné. On dit que (v_n) est une ***suite géométrique de raison q***, lorsque $v_0 \in \mathbb{R}$ est donné et pour tout entier naturel n : $v_{n+1} = q \times v_n = q\,v_n$.

Comment démontrer qu'une suite est géométrique ?

Il suffit de calculer et de montrer que le quotient $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ = constante.

Cette constante (indépendante de n) est la raison de la suite géométrique.

Propriétés :

Soit (v_n) une suite géométrique de raison q. Alors :

(P_1) : Pour tout entier $n \geqslant 0$: $v_n = v_0 \times q^n$.

(P_2) : Pour tout entier $p \geqslant 0$ et pour tout entier $n \geqslant 0$: $v_n = v_p \times q^{(n-p)}$

(P_3) : Si on appelle S_n la somme des $(n+1)$premiers termes de la suite (u_n), c'est-à-dire $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$, alors :

– si $q = 1$, alors : $S_n = (n+1)v_0$

– si $q \neq 1$, alors : $S_n = \dfrac{v_0(1-q^{n+1})}{1-q} = \dfrac{\textit{premier terme} \times (1 - q^{\textit{nombre de termes}})}{1-q}$

Théorème :

1°) Soit (v_n) une suite géométrique de raison **$q > 0$** et de premier terme positif $v_0 > 0$.

- La suite (v_n) est croissante si et seulement si : $q > 1$.
- La suite (v_n) est décroissante si et seulement si : $0 < q < 1$.
- La suite (v_n) est constante si et seulement si : $q = 1$.

Dans les trois cas, la *représentation graphique* de la suite est un nuage de points « *courbe* » d'ordonnée à l'origine v_0.

2°) Si (v_n) une suite géométrique de raison **$q < 0$**, alors les termes de la suite (v_n) sont alternativement postifs et négatifs, donc la suite n'est ni croissante ni décroissante.

Remarque : Si le premier terme est négatif, **$v_0 < 0$**, le sens de variation est inversé.

4.3) Suites arithmético-géométriques

Définition

Soient a et b deux nombres réels donnés.

Une ***suite arithmético-géométrique*** (u_n) est définie par la donnée de son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et par *la relation de récurrence* : $u_{n+1} = a\,u_n + b$ pour tout entier n.

On écrit :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \quad \textit{est donné} \\ u_{n+1} = a\,u_n + b \end{cases}$$

La ***fonction associée*** à cette suite arithmético-géométrique est une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = a\,x + b$.

Cas particuliers

① Si **$a = 0$**, alors la suite (u_n) est *constante* et égale à b.

② Si **$a = 1$**, alors la suite (u_n) est *arithmétique* de raison $r = b$.

③ Si **$b = 0$**, alors la suite (u_n) est *géométrique* de raison $q = a$.

Exemple (*type BAC classique*) : Étude complète d'une suite arithmético-géométrique. Voir Fiche-BacS n°1.

Exercices à faire et à refaire....