Session 2011

BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

« COMPTABILITÉ ET GESTION DES ORGANISATIONS »

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 2 heures

Coefficient : 2

Matériel et documents autorisés :

L'usage des instruments de calcul et du formulaire officiel de mathématiques est autorisé.
Une feuille de papier millimétrée est fournie.

La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Le sujet comporte 4 pages, numérotées de 1 à 4.

Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.
Il comprend 2 pages numérotées 1 et 2.

Exercice 1 : (10 points)

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.
Un grossiste spécialisé dans le jardinage reçoit des sachets de graines d'aubergines « bio » (c'est-à-dire issues de l'agriculture biologique).

A. Événements indépendants, probabilités conditionnelles.

Le grossiste reçoit ces sachets en grande quantité.
Chaque sachet peut présenter deux défauts notés respectivement « a » et « b ».
Le défaut « a » consiste en la présence de désherbants chimiques.
Le défaut « b » consiste en la présence de pesticides.
On prélève un sachet au hasard dans une importante livraison.
L'événement « le sachet présente le défaut « a » est noté A et l'événement « le sachet présente le défaut « b » est noté B.
Des études statistiques ont permis d'établir que $P(A) = 0{,}02$ et $P(B) = 0{,}03$.
On suppose que ces deux événements sont indépendants.

1°) On note E_1 l'évènement : « le sachet présente les deux défauts « a » et « b » ».
Calculer $P(E_1)$.

2°) On dit qu'un sachet est défectueux s'il présente au moins un des deux défauts.
On note E_2 l'évènement : « le sachet est défectueux ».
Calculer $P(E_2)$.

3°) On note E_3 l'évènement : « le sachet ne présente aucun défaut ».
Calculer $P(E_3)$.

4°) Calculer la probabilité que le sachet présente les deux défauts sachant qu'il est défectueux.
Le résultat sera arrondi à 10^{-4}.

Dans tout ce qui suit, les probabilités sont à arrondir à 10^{-4}.

B. Loi binomiale

On note D l'événement « un sachet prélevé dans un stock important est défectueux ». On suppose que **$P(D) = 0{,}05$.**
On prélève au hasard 40 sachets pour vérification, le stock étant assez important pour assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.
On considère la variable aléatoire X qui à tout prélèvement de 40 sachets associe le nombre de sachets défectueux.

1°) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

2°) Calculer la probabilité pour que dans un tel prélèvement, il y ait exactement 2 sachets défectueux.

3°) Calculer la probabilité pour que dans un tel prélèvement, il y ait au moins un sachet défectueux.

C. Loi normale

On s'intéresse dorénavant à la masse d'un sachet.

La variable aléatoire Y qui à chaque sachet associe sa masse en grammes est notée Y.

On suppose que Y suit la loi normale de moyenne 120 et d'écart-type 8.

1°) Calculer $P(Y \geq 104)$

2°) Un sachet dont la masse en grammes n'est pas dans l'intervalle [104 ; 136] est rejeté. Calculer la probabilité qu'un sachet soit rejeté.

Exercice 2 : (10 points)

A. Etude d'une fonction

La fonction f est définie sur $[0; +\infty[$ par $f(t) = \dfrac{1}{1+4{,}9\, e^{-0{,}125t}}$.

On note C la courbe représentant f dans un repère orthogonal (unités graphiques : 0,5 sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées).

1°) On admet que $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-0{,}125t} = 0$. Calculer la limite de f en $+\infty$.

En déduire que la courbe C admet une asymptote D dont on donnera une équation.

2°) Recopier et compléter le tableau suivant en arrondissant les résultats à 10^{-2}.

t	0	5	10	15	20	25	30
$f(t)$							

3°) a) Calculer la dérivée de f et vérifier que $f'(t) = \dfrac{0{,}6125\, e^{-0{,}125t}}{\left(1+4{,}9\, e^{-0{,}125t}\right)^2}$.

b) Établir le tableau de variation de f.

4°) Tracer la courbe C et la droite D.

5°) Résoudre graphiquement l'équation $f(t) = 0{,}5$. Faire apparaître les traits utiles sur le graphique.

B. Valeur moyenne.

1°) On admet que $f(t) = \dfrac{e^{0{,}125t}}{4{,}9 + e^{0{,}125t}}$.

Vérifier que la fonction F définie sur $[0; +\infty[$ par $F(t) = 8 \ln(4{,}9 + e^{0{,}125t})$ est une primitive de f.

2°) Démontrer que la valeur moyenne de f sur [10 ; 20] est : $V_m = 0{,}8 \ln\left(\dfrac{4{,}9+e^{2{,}5}}{4{,}9+e^{1{,}25}}\right)$.

3°) Donner une valeur approchée de V_m à 10^{-3} près.

C. Applications des parties A. et B.

Une étude statistique a établi qu'à partir de l'année 1990, le pourcentage des ménages équipés d'un four à micro-ondes, dans un département, est donné approximativement par la formule :

$f(t) = \dfrac{1}{1 + 4{,}9\, e^{-0.125t}}$ où t désigne le nombre d'années écoulées depuis 1990.

Par exemple $f(0) \approx 0{,}17$; en 1990 il y avait 17 % des ménages équipés d'un four à micro-ondes.

1°) Calculer le pourcentage des ménages ayant cet équipement en 2010.
Le résultat sera arrondi à 10^{-2}.

2°) Déduire de la partie **A.**, l'année à partir de laquelle 50 % des ménages sont équipés d'un four à micro-ondes.

3°) À l'aide d'une phrase, interpréter le résultat obtenu au 3°) de la partie **B**.

FORMULAIRE DE MATHEMATIQUES

BTS COMPTABILITE ET GESTION DES ORGANISATIONS

1. *RELATIONS FONCTIONNELLES :*

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$, où $a > 0$ et $b > 0$

$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$

$a^t = e^{t \ln a}$, où $a > 0$

$t^\alpha = e^{\alpha \ln t}$, où $t > 0$

2. *CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL*

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{t \to +\infty} \ln t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to +\infty} e^t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to -\infty} e^t = 0$;

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{t \to 0} \ln t = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha \ln t = 0$.

Croissances comparées à l'infini

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\ln t}{t^\alpha} = 0$

b) Dérivées et primitives :

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\dfrac{1}{t}$
e^t	e^t
t^α $(\alpha \in \mathbb{R}^*)$	$\alpha t^{\alpha-1}$

Opérations

$(u+v)' = u' + v'$	$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$
$(ku)' = ku'$	$(e^u)' = e^u u'$
$(uv)' = u'v + uv'$	$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives
$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$	$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$
$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$	

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur [a , b] :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Intégration par parties :

$$\int_a^b u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t$$

3. *PROBABILITES :*

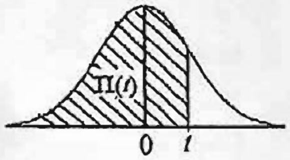
a) **Loi binomiale** $P(X=k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ où $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$; $E(X) = np$; $\sigma(X) = \sqrt{npq}$

b) **Loi normale**

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité : $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE $\mathcal{N}(0,1)$

$\Pi(t)=P(T\leq t)=\int_{-\infty}^{t}f(x)\,\mathrm{d}x$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota : $\Pi(-t)=1-\Pi(t)$

CGMAT