Calcul d'une primitive ou d'une intégrale via la notion de « *changement de variable* »

Exemple n°1 **: Calcul de** $I(x)=\int_a^x \tan(t)\,dt$

Indication $\tan(x)=\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ *avec* $x\neq\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ *et* $x\neq-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$

ET si on pose $t=\tan(\frac{x}{2})$ *alors* $\forall x\in\mathbb{R}$ $\sin(x)=\dfrac{2t}{1+t^2}$ *et* $\forall x\in\mathbb{R}$ $\cos(x)=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ (et on a $|t|\neq 1$)

À titre d'exemple, examinons l'effet de 4 changements de variable possibles pour calculer :

$$I(x)=\int_c^x \tan(t)\,\mathrm{d}t=-\ln|\cos(x)|+C\,.$$

Voici les 4 différents changements de variable possibles pour calculer cette intégrale :

$$u=\tan\frac{t}{2}\quad\longrightarrow\quad I(x)=\int_{\tan(c/2)}^{\tan(x/2)}\frac{4u}{1-u^4}\,\mathrm{d}u$$

$$u=\cos(t)\quad\longrightarrow\quad I(x)=\int_{\cos(c)}^{\cos(x)}-\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u$$

$$u=\sin(t)\quad\longrightarrow\quad I(x)=\int_{\sin(c)}^{\sin(x)}\frac{u}{1-u^2}\,\mathrm{d}u$$

$$u=\tan(t)\quad\longrightarrow\quad I(x)=\int_{\tan(c)}^{\tan(x)}\frac{u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u\,.$$

Evidemment, les 4 changements de variable conduisent au même résultat final, mais certains sont plus simples...

A vous de faire les différents calculs pour trouver que $I(x)=-\ln|\cos(x)|+Cte$

*Essayer de faire CES **4** changements de variable….*

*Ces 4 changements de variable permettent de trouver le résultat, mais **plus ou moins facilement…. et il faut essayer…***

Exemple n°2 **: Calcul d'une autre intégrale** (*changement de variable :* $u=e^t$)

*Indication : la fonction «**sinus hyperbolique**»* $f:x\mapsto\sinh(x)$ *vérifie* $\forall x\in\mathbb{R}$ $f(x)=\sinh(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

Exemple :

$$I=\int_1^2\frac{1}{\sinh(t)}\,\mathrm{d}t=\int_1^2\frac{2}{\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t\,.$$

Posons :

$$u=\mathrm{e}^t\quad\text{soit}\quad t=\ln(u)\quad\text{et}\quad\mathrm{d}t=\frac{1}{u}\mathrm{d}u\,.$$

$$\begin{aligned}I&=\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}\frac{2}{u-\frac{1}{u}}\,\frac{1}{u}\mathrm{d}u=\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}\frac{2}{u^2-1}\,\mathrm{d}u\\&=\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\,\mathrm{d}u=\Big[\ln|u-1|-\ln|u+1|\Big]_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}\\&=\ln\frac{\mathrm{e}^2-1}{\mathrm{e}^2+1}-\ln\frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}+1}=\ln\frac{(\mathrm{e}+1)^2}{\mathrm{e}^2+1}\,.\end{aligned}$$

***Exemple n°3* : Calcul d'une primitive** *(par la technique de linéarisation)*

Rappel :

$\sin(x) = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$	$\cos(x) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$
$\sinh(x) = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$	$\cosh(x) = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$

Exemple : technique de « *linéarisation* » de l'expression : $\sin^4(x)\cos^6(x)$

$$\begin{aligned}
\sin^4(x)\cos^6(x) &= \frac{1}{2^{10}}(e^{ix} - e^{-ix})^4(e^{ix} + e^{-ix})^6 \\
&= \frac{1}{1024}(e^{2ix} - e^{-2ix})^4(e^{ix} + e^{-ix})^2 \\
&= \frac{1}{1024}(e^{8ix} - 4e^{4ix} + 6 - 4e^{-4ix} + e^{-8ix})(e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}) \\
&= \frac{1}{1024}(e^{10ix} - 4e^{6ix} + 6e^{2ix} - 4e^{-2ix} + e^{-6ix} \\
&\qquad +2e^{8ix} - 8e^{4ix} + 12 - 8e^{-4ix} + 2e^{-8ix} \\
&\qquad +e^{6ix} - 4e^{2ix} + 6e^{-2ix} - 4e^{-6ix} + e^{-10ix}) \\
&= \frac{1}{512}\Big(6 + 2\cos(2x) - 8\cos(4x) - 3\cos(6x) + 2\cos(8x) + \cos(10x)\Big).
\end{aligned}$$

D'où une primitive de $\sin^4(x)\cos^6(x)$:

$$\frac{3x}{256} + \frac{\sin(2x)}{512} - \frac{\sin(4x)}{256} - \frac{\sin(6x)}{1024} + \frac{\sin(8x)}{2048} + \frac{\sin(10x)}{5120}.$$