Fiche 5 : Integrales et primitives

Utilisation du tableau des primitives

Méthode

On utilise dans ces exercices la linéarité de l'intégrale : $\int_a^b k \times f(x)\,dx = k \times \int_a^b f(x)\,dx$ si k est une constante réelle. On se ramène ainsi aux primitives usuelles en « équilibrant » les coefficients, puis utiliser une forme connue de primitive : $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

• Type $u'e^u$

Exercice 1

Calculer $I_1 = \int_0^1 x\,e^{(x^2+2)}\,dx$

• Type $\frac{u'}{u}$

Il faut se ramener à $\frac{u'}{u}$ (toujours en « équilibrant » les coefficients) qui donnera une primitive du type $\ln|u|$ si $u(x) > 0$.

Exercice 2

a) Calculer $J = \int_0^1 \frac{x^3}{5x^4+2}\,dx$

b) Calculer $I_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos(x)}{1+2\sin(x)}\,dx$

• Type $u'u^\alpha$

Exercice 3

Calculer $I_3 = \int_0^1 x^3\sqrt{x^4+2}\,dx$

La formule d'intégration par parties

Appliquer la formule d'intégration par parties

Méthode

On doit analyser l'expression de la fonction pour l'organiser sous la forme kuv' avec k constante réelle. Il arrive que v' soit la fonction $x \mapsto 1$ ce qui n'est pas la situation la plus facile à identifier…

Exercice 4

A l'aide d'une intégration par partie, calculer $J_1 = \int_1^e x\ln(x)\,dx$.

Appliquer deux fois la formule d'intégration par parties et obtenir une équation dont l'intégrale est l'inconnue

Exercice 5

A l'aide de deux intégrations par parties, calculer $J_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin(x)\,dx$.

Calculer une aire

Méthode

Pour calculer une aire, on peut s'aider de la courbe représentative afin de savoir si cette courbe est au-dessus ou en dessous de l'axe des abscisses. Si elle est au-dessus, on utilisera $\int_a^b f(x)\,dx$, si elle est en dessous, on calculera $-\int_a^b f(x)\,dx$ (avec $a < b$). L'énoncé n'indique pas les unités choisies sur chaque axe, on fera le calcul en unités de surface, unité non précisée par l'énoncé.

Exercice 6

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie pour tout x réel par : $f(x) = e^x(1-e^x)$.

1. Calculer l'aire $A(k)$ de l'ensemble des points du plan dont les coordonnées (x,y) vérifient : $k \leq x \leq 0$ et $0 \leq y \leq f(x)$ où k désigne un nombre réel négatif.

2. Calculer $A(-3)$ avec une valeur approchée à 10^{-3} près.

Calculer une intégrale, combinaison linéaire de deux intégrales

Méthode

On écrit $I = aJ + bK$ où J et K sont des intégrales que l'on sait calculer.

Exercice 7

On pose $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{1+2\sin(x)}\,dx$, $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x)}{1+2\sin(x)}\,dx$

$I_1 + I = I_2$

a) Calculer I_2
b) Calculer I_1
c) En déduire I.

Sens de variation d'une suite définie par une intégrale

Méthode

On privilégie la notion de suite, il est souvent inutile d'essayer de calculer les intégrales correspondantes. Dans la plupart des cas, pour majorer (minorer) une intégrale dont les bornes sont « dans le bon ordre », on majore (minore) la fonction sur l'intervalle fermé dont les bornes sont celles de l'intégrale.

Exercice 8

Pour tout entier n appartenant à $\mathbb{N}^*$, on considère l'intégrale $I_n = \int_1^e (\ln(x))^n \, dx$.

a) Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $[1, e]$ et pour tout n entier naturel non nul, on a $(\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} \geq 0$.
b) En déduire que la suite I_n est décroissante.