Fiche 5 : Integrales et primitives

Utilisation du tableau des primitives

Exercice 1

On prend $u(x) = x^2 + 2$ ce qui amène $u'(x) = 2x$.
D'où la nécessité de multiplier et diviser par 2.
On écrira :

$$I_1 = \int_0^1 xe^{(x^2+2)}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 2xe^{(x^2+2)}\,dx$$

$$I_1 = \frac{1}{2}\left[e^{x^2+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2}(e^2 - e^1) = \frac{1}{2}(e^2 - e^1)$$

Exercice 2

a) On prend $u(x) = 5x^4 + 2$ ce qui amène $u'(x) = 20x^3$.
D'où la nécessité de multiplier et diviser par 20.
On écrira :

$$J = \int_0^1 \frac{x^3}{5x^4+2}dx = \frac{1}{20}\int_0^1 \frac{20x^3}{5x^4+2}dx$$

$$J = \frac{1}{20}\left[\ln\left(5x^4+2\right)\right]_0^1 = \frac{1}{20}\left(\ln(7) - \ln(2)\right) = \frac{1}{20}\ln\left(\frac{7}{2}\right)$$

b) I_1 est du type $\frac{U'}{U}$ si on multiplie et divise par 2.

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos(x)}{1+2\sin(x)}dx = \frac{1}{2}\left[\ln\left|1+2\sin(x)\right|\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$I_1 = \frac{1}{2}\left(\ln\left(1+2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - \ln\left(1+2\sin(0)\right)\right)$$

$$I_1 = \frac{1}{2}\left(\ln(3) - \ln(1)\right) = \frac{1}{2}\ln(3)$$

Exercice 3

On prend $u(x) = \left(x^4+2\right)$, ce qui donne $u'(x) = 4x^3$.
D'où la nécessité de multiplier et diviser par 4.

$$I_3 = \int_0^1 x^3\sqrt{x^4+2}\,dx = \frac{1}{4}\int_0^1 4x^3\sqrt{x^4+2}\,dx$$

$$I_3 = \frac{1}{4}\int_0^1 4x^3\left(x^4+2\right)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{4}\left[\frac{\left(x^4+2\right)^{1+\frac{1}{2}}}{1+\frac{1}{2}}\right]_0^1 \text{ car } \alpha = \frac{1}{2}$$

$$I_3 = \frac{1}{4}\frac{2}{3}\left[\left(x^4+2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{6}\left(3^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}\right)$$

La formule d'intégration par parties

Exercice 4

$u(x) = \ln(x)$ d'où $u'(x) = \frac{1}{x}$.

$v'(x) = x$ d'où $v(x) = \frac{x^2}{2}$.

$$J_1 = \int_1^e x\ln(x)dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x}\times\frac{x^2}{2}dx$$

$$J_1 = \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e xdx = \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^e - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e$$

$$J_1 = \left(\frac{e^2\ln(e)}{2} - \frac{1^2\ln(1)}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$J_1 = \frac{e^2}{2} - 0 - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$$

Appliquer deux fois la formule d'intégration par parties et obtenir une équation dont l'intégrale est l'inconnue

Exercice 5

On connaît une primitive de chacune des deux fonctions :
$x \mapsto e^x$ et $x \mapsto \sin(x)$;
$u(x) = \sin(x)$ d'où $u'(x) = \cos(x)$;
$v'(x) = e^x$ d'où $v(x) = e^x$;

$$J_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin(x)\,dx = \left[e^x\sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos(x)dx.$$

On refait une intégration par parties sur l'intégrale, il vient :
$u(x) = \cos(x)$ d'où $u'(x) = -\sin(x)$;
$v'(x) = e^x$ d'où $v(x) = e^x$.

$$J_2 = \left[e^x\sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left(\left[e^x\cos(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\sin(x)e^x dx\right)$$

$$J_2 = \left[e^x\sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[e^x\cos(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)e^x dx$$

Pour cette dernière intégrale, on reconnaît J_2, on obtient alors :

$$J_2 = \left[e^x\sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[e^x\cos(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - J_2$$

$$2J_2 = \left(e^{\frac{\pi}{2}}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - e^0\sin(0)\right) - \left(e^{\frac{\pi}{2}}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - e^0\cos(0)\right)$$

$$2J_2 = \left(e^{\frac{\pi}{2}} - 0\right) - \left(0 - e^0\right)$$

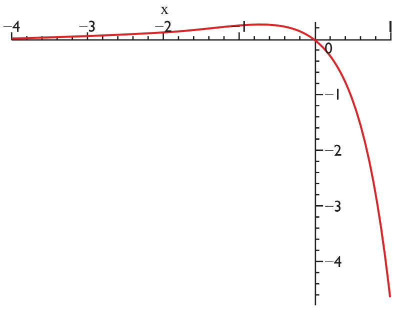
$$2J_2 = e^{\frac{\pi}{2}} - 1$$

$$J_2 = \frac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{2}$$

Calculer une aire

Exercice 6

La courbe représentative de cette fonction possède l'allure suivante :



L'aire à calculer correspond à la partie de la courbe située au-dessus de l'axe des abscisses, limitée par le point O et la droite d'équation $x = k$ (avec $k < 0$).

Par conséquent $\int_k^0 f(x)dx > 0$ puisque les bornes sont dans le bon ordre.

D'où $A(k) = \int_k^0 f(x)dx$ $A(k) = \int_k^0 e^x\left(1 - e^x\right)dx = \int_k^0 \left(e^x - e^{2x}\right)dx$

$$A(k) = \left[e^x - \frac{e^{2x}}{2}\right]_k^0 = \left(e^0 - \frac{e^0}{2}\right) - \left(e^k - \frac{e^{2k}}{2}\right)$$

$$A(k) = \frac{1}{2} + \left(e^k - \frac{e^{2k}}{2}\right) \quad A\left(-3\right) = e^{-3} - \frac{1}{2}e^{-6} + \frac{1}{2} \simeq 0,549$$

Calculer une intégrale, combinaison linéaire de deux intégrales

Exercice 7

a) $I_1 + I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{1 + 2\sin(x)}dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x)}{1 + 2\sin(x)}dx$

$$I_1 + I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x) + \sin(2x)}{1 + 2\sin(x)}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x) + 2\sin(x)\cos(x)}{1 + 2\sin(x)}dx$$

$$I_1 + I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)(1 + 2\sin(x))}{1 + 2\sin(x)}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)dx$$

Après simplification par $1 + 2\sin(x)$ qui ne s'annule pas sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$I_1 + I = \left[\sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) = 1.$$

b) I_1 a été calculée
☞ Exercice 2

c) Effectivement : $I = I_2 - I_1 = 1 - \frac{1}{2}\ln(3)$.

Sens de variation d'une suite définie par une intégrale

Exercice 8

a) Pour tout $x > 0$ et tout entier naturel n non nul :

$(\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} = (\ln x)^n - (\ln x)^n(\ln x) = (\ln x)^n(1 - \ln x)$

D'autre part, la fonction $\ln$ étant strictement croissante, de $1 \leq x \leq e$, on déduit $0 \leq \ln(x) \leq 1$.
Et par suite :

$(\ln(x))^n > 0$

et $1 - \ln(x) > 0$

D'où le résultat : $(\ln(x))^n - (\ln(x))^{n+1} \geq 0$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[1, e]$ et pour tout n entier naturel non nul.
b) Soit n un entier naturel non nul. D'après a), on a :

$(\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} \geq 0$

$(\ln x)^n \geq (\ln x)^{n+1}$

pour tout x appartenant à l'intervalle $[1, e]$

Les bornes sont dans le bon ordre, il résulte :

$\int_1^e (\ln x)^n \, dx \geq \int_1^e (\ln x)^{n+1} \, dx$

$I_n \geq I_{n+1}$

pour tout n entier naturel non nul.
Conclusion : la suite $(I_n)_n$ est décroissante.