STATISTIQUES À UNE VARIABLE

Table des matières

Dans tout ce chapitre, on considèrera les 3 séries statistiques suivantes :

Série A :
Notes obtenues à un contrôle dans une classe de 30 élèves :

2 – 3 – 3 – 4 – 5 – 6 – 6 – 7 – 7 – 7 – 8 – 8 – 8 – 8 – 8 – 9 – 9 – 9 – 9 – 9 – 9 – 10 – 10 – 11 – 11 – 11 – 13 – 13 – 15 – 16

Série B :
Salaires en euros des employés d'une entreprise :

Salaires	[900; 1200]	[1200; 1400]	[1400; 1600]	[1600; 1800]	[1800; 2000]	[2000; 2400]	TOTAL
Effectif	30	30	60	80	40	40	280

Série C :
Proportion d'adhérents à un club sportif dans différentes sections :

- 17% jouent au handball,
- 25% houent au rugby,
- 58% jouent au tennis.

I Méthodes de représentation

I.1 Vocabulaire

La **population** est l'ensemble des individus sur lesquels portent l'étude statistique. (Par exemple la classe de BTS domotique, la popolation féminine, les fonctionnaires ...) dont chaque élément est appelé **individu**.

Un **échantillon** est une partie de la population considérée.

Le **caractère** (ou **variable**) d'une série statistique est une propriété étudiée sur chaque individu :

- Lorsque le caractère ne prend que des valeurs (ou **modalités**) numériques, il est **quantitatif** :
  - **discret** s'il ne peut prendre que des valeurs isolées (notes, âge ...)
  - **continu** dans le cas contraire (poids, taille ...). Dans ce cas on effectue souvent un regroupement des valeurs par **classes**.
- Sinon, on dit qu'il est **qualitatif** (couleur des yeux, sport pratiqué ...) : les modalités ne sont pas des nombres.

A chaque valeur (ou classe) est associée un **effectif** n : c'est le nombre d'individus associés à cette valeur.

Faire des **statistiques**, c'est recueillir, organiser, synthétiser, représenter et exploiter des données, numériques ou non, dans un but de comparaison, de prévision, de constat ...

Les plus gros "consommateurs" de statistiques sont les assureurs (risques d'accidents, de maladie des assurés), les médecins (épidémiologie), les démographes (populations et leur dynamique), les économistes (emploi, conjoncture économique), les météorologues ...

I.2 Tableaux

Définition 1
On considère une série statistique X à caractère quantitatif, dont les p valeurs sont données par x_1, x_2, ..., x_p d'effectifs associés n_1, n_2, ..., n_p avec $n_1 + n_2 + ... + n_p = N$.

- *A chaque valeur (ou classe) est associée une fréquence f_i : c'est la proportion d'individus associés à cette valeur.*
- *$f_i = \dfrac{n_i}{N}$ est un nombre compris entre 0 et 1, que l'on peut écrire sous forme de pourcentage.*
- *L'ensemble des fréquences de toutes les valeurs du caractère s'appelle la distribution des fréquences de la série statistique.*

Exemple 1
On peut représenter la **série A** par un tableau d'effectifs, et le compléter par la distribution des fréquences :

Notes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Eff.	0	1	2	1	1	2	3	5	6	2	3	0	2	0	1	1	0	0	0
Fréq. en %	0	3	7	3	3	7	10	17	20	7	10	0	7	0	3	3	0	0	0

Remarque 1
On peut vérifier que la somme des fréquences est égale à 1 (ou à 100 si on les exprime en pourcentages).

On peut aussi faire un regroupement par classe, ce qui rend l'étude moins précise, mais qui permet d'avoir une vision plus globale.

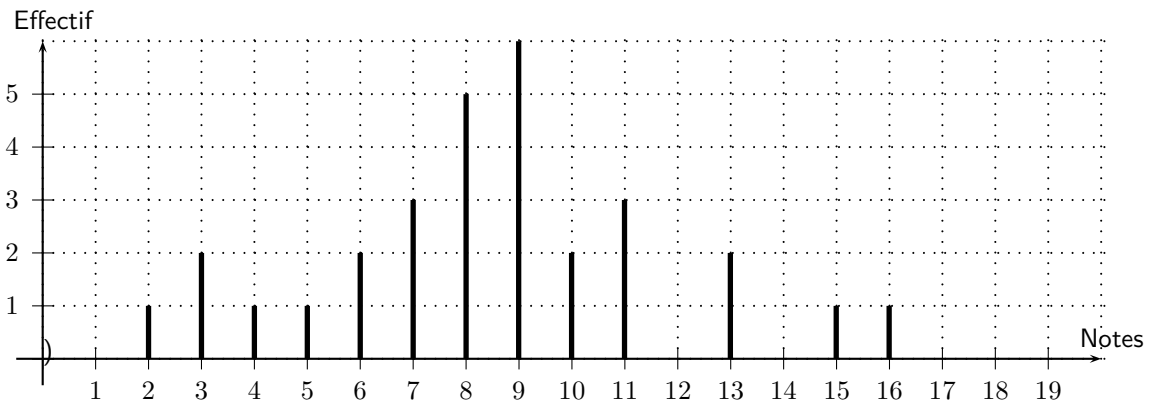
Exemple 2
Toujours pour la **série A**, si on regroupe les données par classes d'amplitude 5 points, on obtient :

Notes	[0 ; 5 [	[5 ; 10 [	[10 ; 15 [	[15 ; 20 [	total
Effectif	4	17	7	2	30
Fréquence	0,13	0,57	0,23	0,07	1

I.3 Graphiques

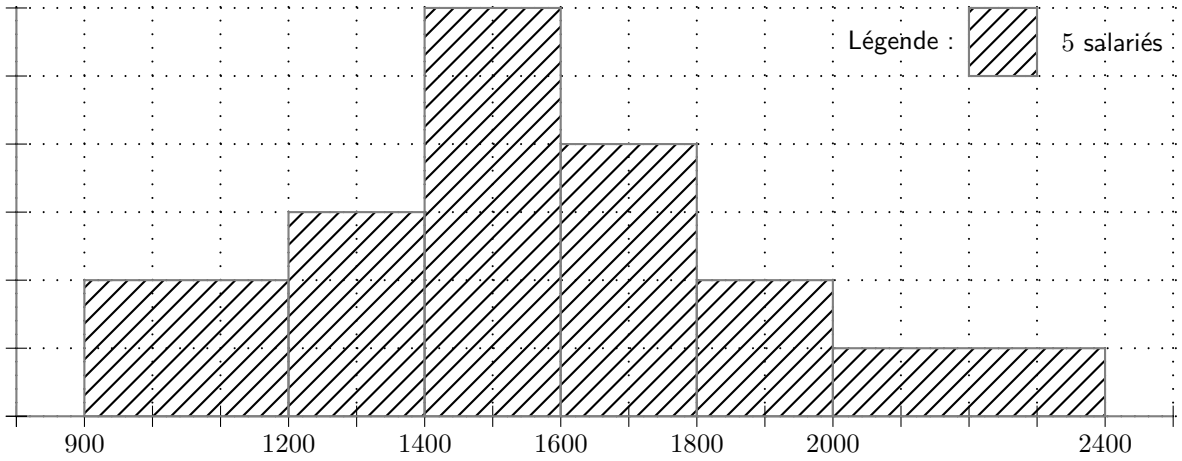
Lorsque le caractère étudié est **quantitatif et discret**, on peut représenter la série statistique étudiée par un **diagramme en bâtons** : la hauteur de chaque bâton est alors proportionnelle à l'effectif (ou à la fréquence) associé à chaque valeur.

Exemple 3
Voici le diagramme en bâtons représentant la série des notes de la **série A** :



Lorsque le caractère étudié est **quantitatif et continu**, et lorsque les modalités sont regroupées en classes, on peut représenter la série par un **histogramme** : l'aire de chaque rectangle est alors proportionnelle à l'effectif (ou à la fréquence) associée à chaque classe.
Lorsque les classes ont la même **amplitude**, c'est la hauteur qui est proportionnelle à l'effectif.

Exemple 4
Pour la **série B**, on obtient par exemple l'histogramme suivant :



Enfin, lorsque le caractère est **qualitatif**, on peut représenter la série par :

• **Un diagramme circulaire** (« camemberts ») :
La mesure de chaque secteur angulaire est proportionnelle à l'effectif associé.

• **Un diagramme en tuyaux d'orgue :**
Chaque classe est représentée par un rectangle de même largeur et de longueur proportionnelle à l'effectif, donc à la fréquence.

• **un diagramme en bandes :**
Chaque classe est représentée par un rectangle de même largeur et de longueur proportionnelle à l'effectif, donc à la fréquence.

Exemple 5
Diagrammes de la **série C**

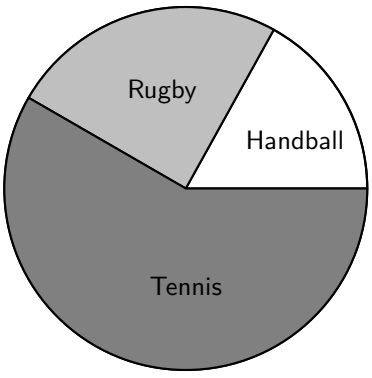


Diagramme circulaire

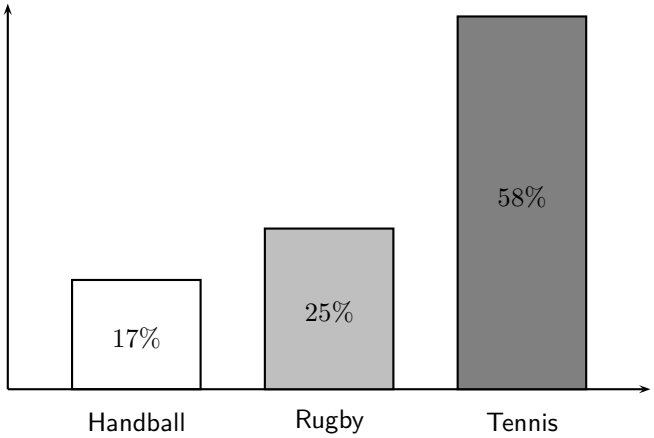


Diagramme en tuyau d'orgue

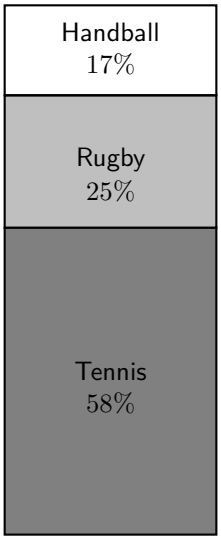


Diagramme en bandes

II Caractéristiques de position

Dans le premier paragraphe, on a commencé à condenser les informations pour les rendre plus lisibles. Dans ce deuxième paragraphe, on va synthétiser encore davantage l'information pour les caractères quantitatifs en cherchant quelques nombres permettant de décrire au mieux la population observée.

II.1 Moyenne

Définition 2
Soit une série statistique à caractère quantitatif, dont les p valeurs sont données par x_1, x_2, ..., x_p d'effectifs associés n_1, n_2, ..., n_p avec $n_1 + n_2 + ... + n_p = N$.
La moyenne pondérée de cette série est le nombre noté $\overline{x}$ qui vaut

$$\overline{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + ... + n_px_p}{n_1 + n_2 + ... + n_p} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_ix_i.$$

Remarque 2
Lorsque la série est regroupée en classes, on calcule la moyenne en prenant pour valeurs x_i le **centre de chaque classe** ; ce centre est obtenu en faisant la moyenne des deux extrémités de la classe.

Exemple 6
- Dans la **série A**, la moyenne du contrôle est égale à $\overline{m} = \frac{254}{30} \approx 8,47$.
- Dans la **série B**, une estimation du salaire moyen est donné par : $\overline{S} = \frac{460500}{280} \approx 1644,64$.

Remarque 3
On peut aussi calculer une moyenne à partir de la distribution de fréquences :

$$\overline{x} = f_1x_1 + f_2x_2 + \cdots + f_px_p = \sum_{i=1}^{p} f_ix_i.$$

Propriété 1 (Linéarité de la moyenne)
- Si on ajoute (ou soustrait) un même nombre k à toutes les valeurs d'une série, alors la moyenne de cette série se trouve augmentée (resp. diminuée) de k.
- Si on multiplie (ou divise) par un même nombre non nul k toutes les valeurs d'une série, alors la moyenne de cette série se trouve multipliée (resp. divisée) par k.

Exemple 7
On considère la **série A** :
- Si on ajoute $1,5$ points à chaque note du contrôle, alors la moyenne de classe devient $\overline{m} = 8,47 + 1,5 = 9,97$.
- Si on augmente chaque note de 10%, cela revient à multiplier chaque note par $1,1$, ce qui donne $\overline{m} = 8,47 \times 1,1 = 9,32$.

Propriété 2 (Moyenne par sous-groupes)
Soit une série statistique, d'effectif total N, de moyenne $\overline{x}$.
Si on divise cette série en deux sous-groupes **disjoints** d'effectifs respectifs p et q (avec $p+q=N$) de moyennes respectives $\overline{x}_1$ et $\overline{x}_2$, alors on a :

$$\overline{x} = \frac{p}{N} \times \overline{x}_1 + \frac{q}{N} \times \overline{x}_2.$$

Exemple 8
On suppose par exemple que les 12 garçons de la classe de la **série A** ont obtenu une moyenne globale de 8 sur 20.

- La moyenne du groupe formé par les filles de la classe vérifie : $9,47 = \frac{12}{30} \times 8 + \frac{18}{30} \times \overline{m}_f$.
- Soit $\overline{m}_f = \frac{30}{18}\left(9,47 - \frac{12}{30} \times 8\right) = 10,45$.

II.2 Médiane

Définition 3
Soit une série statistique ordonnée dont les n valeurs sont $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \cdots \leqslant x_n$.
La médiane est un nombre M qui permet de diviser cette série en deux sous-groupes de même effectif.

- *Si n est impair, n est la valeur de cette série qui est située au milieu, à savoir la valeur dont le rang est $\frac{n+1}{2}$, notée $x_{\frac{n+1}{2}}$.*
- *Si n est pair, n est le centre l'intervalle médian, qui est l'intervalle formé par les deux nombres situés « au milieu » de la série, à savoir $x_{\frac{n}{2}}$ et $x_{\frac{n}{2}+1}$.*

Exemple 9

- La médiane de la série « $2-5-6-8-9-9-10$ » est 8.
- La médiane de la série « $2-5-6-8-9-9$ » est 7.
- La médiane de la série « $2-5-6-6-9-10$ » est 6.

Exemple 10
On souhaite calculer la médiane de la **série A**.

- Pour cela, on commence par remplir le tableau des effectifs cumulés croissants :

Notes	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Eff.	0	1	2	1	1	2	3	5	6	2	3	0	2	0	1	1	0	0	0
ECC.	0	1	3	4	5	7	10	15	21	23	26	26	28	28	29	30	30	30	30

- Ensuite, l'effectif étant de 30, on chosit la moyenne entre la $15^{ième}$ et la $16^{ième}$ note.
  On obtient $Med = \frac{8+9}{2} = 8,5$.
- Ce qui signifie que la moitié des notes est inférieure ou égale à $8,5$, et que l'autre moitié des notes est supérieure ou égale à $8,5$.

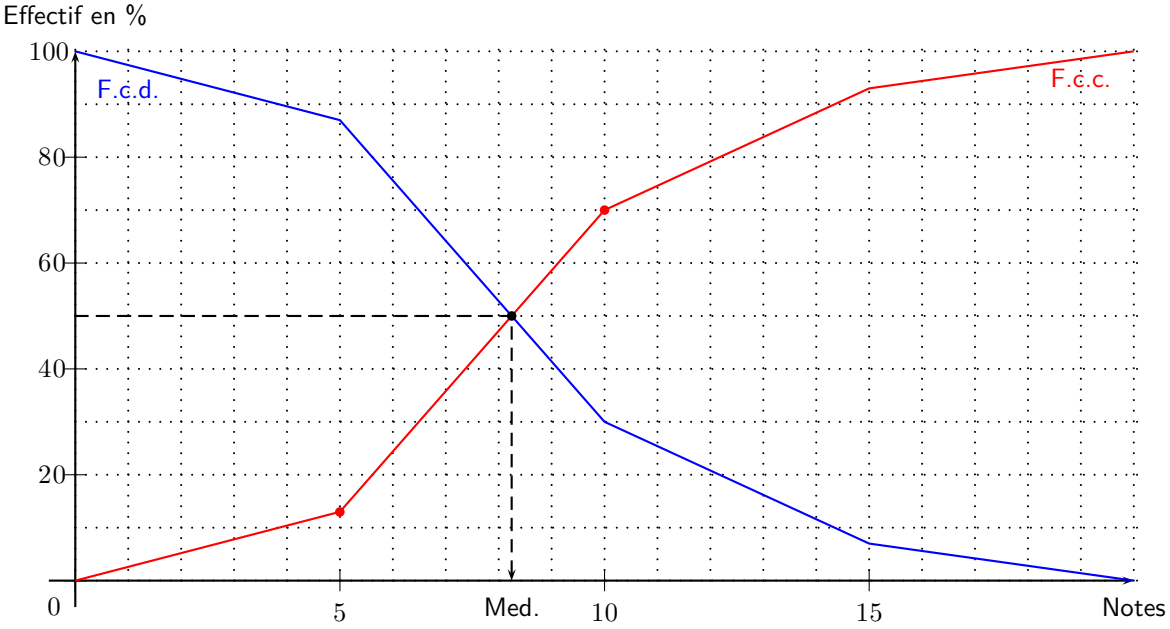
Dans le cas de répartition par classes, la médiane peut être évaluée soit graphiquement, soit par interpolation affine à l'aide d'un polygône des effectifs cumulés.

Exemple 11
On choisit la répartition par classes de la **série A** :

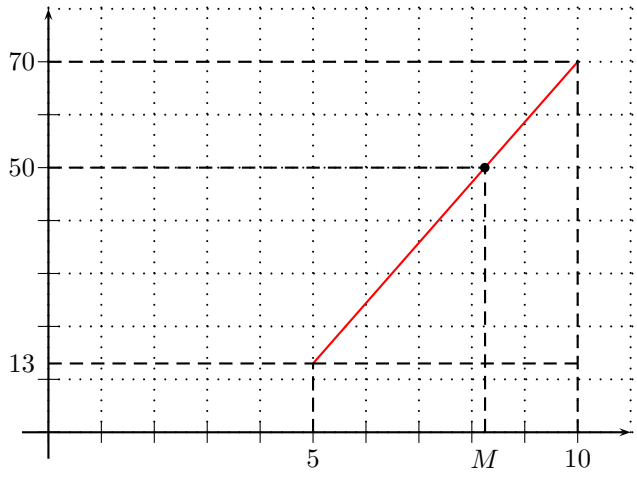
- On commence par créer le tableau des fréquences cumulées croissantes :
  (On en profite aussi pour indiquer les fréquences cumulées décroissantes).

Notes	[0 ; 5 [	[5 ; 10 [	[10 ; 15 [	[15 ; 20 [
Fréq. en %	13	57	23	7
F.c.c.	13	70	93	100
F.c.d.	87	43	7	0

- Puis on place les points correpondants aux extrémités de chaque classe sur un graphique :



- On détermine le point du polygône d'ordonnée 50% et on trouver eniron $8,2$.
- Pour trouver la médiane, on peut aussi tracer le polygône des fréquences cumulées décroissantes et lire l'abscisse du point de concours des deux polygônes. On trouve aussi $8,2$.
- Enfin, par le calcul, 50% se situe dans l'intervalle $[\ 5\ ;\ 10\ [$.
  On fait l'hypothèse que les longeurs des axes sont uniformément réparties dans cette classe.
  On peut alors procéder à une interpolation linéaire d'après le théoème de Thalès :



$$\frac{M-5}{10-5}=\frac{50-13}{70-13}\iff\frac{M-5}{5}=\frac{37}{57}\iff M=5\times\frac{37}{57}+5=\frac{470}{57}\approx 8,25.$$

II.3 Quartiles, déciles ...

Définition 4
Soit une série statistique.

- *On appelle quartiles de la série un triplet de réels (Q_1 ; Q_2 ; Q_3) qui sépare la série en quatre groupes de même effectif.*
- *On appelle déciles de la série un 9-uplet de réels (D_1 ; D_2 ; ... ; D_9) qui sépare la série en dix groupes de même effectif.*

Remarque 4
Par définition, si X est une série statistique, $Q_2 = D_5 = Med(X)$.

Le calcul des valeurs des quartiles ou des déciles se fait en général à partir des graphiques des effectifs (ou fréquences) cumulés croissants, par interpolation linéaire.
La calculatrice donne les valeurs de Q_1, Med et Q_3.

Exemple 12

- Pour la **série A**, la calculatrice nous donne $Q_1 = 7$, $Méd = 8,5$ et $Q_3 = 10$.
- Graphiquement, on trouve $D_1 \approx 3,8$ et $D_9 \approx 14,2$.
- Pour la **série B**, on trouve $Q_1 = 1500$, $Med = 1700$ et $Q_3 = 1900$.

III Caractéristiques de dispersion

III.1 Étendue

Il s'agit de la première mesure de la dispersion d'une série statistique. Son principal mérite a longtemps été d'exister, et de fournir une information sur la dispersion très simple à obtenir.

Définition 5
Soit X une série statistique discrète. On appelle étendue de la série le réel, défini par $Etd(X) = \max(X) - \min(X)$.

Exemple 13
L'étendue de la **série A** est de $16 - 2 = 14$.

III.2 Intervalle interquartille

Définition 6
On appelle intervalle inter-quartiles l'intervalle [Q_1 ; Q_3].
L'amplitude de cet intervalle est appelée écart inter-quartiles.

Exemple 14

- Dans la **série A**, l'intervalle interquartile est l'intervalle [7 ; 10] dont l'écart vaut $10 - 7 = 3$.
- Cet intervalle comprend donc la moitié des notes de la série située au centre de celle-ci.

III.3 Variance d'une série statistique

Définition 7
La variance d'une série statistique est le nombre noté $V(x)$ obtenu comme moyenne des carrés des écarts constatés par rapport à la moyenne de la série :

$$V(X) = \frac{n_1(x_1 - \bar{x})^2 + n_2(x_2 - \bar{x})^2 + ... + n_p(x_p - \bar{x})^2}{n_1 + n_2 + ... + n_p} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i(x_i - \bar{x})^2.$$

Remarque 5
Cette formule s'applique bien sûr au cas d'une série statistique sans coefficients : on est ramené à une série pour laquelle tous les coefficients valent 1.

Exemple 15
La variance de la **série B** vaut :
$V(X) = \frac{30(1050 - 1645)^2 + 30(1300 - 1645)^2 + ... + 40(2200 - 1645)^2}{280} \approx 109346.$

Propriété 3
On utilise aussi la formule :

$$V(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2 - \bar{x}^2.$$

III.4 Écart-type d'une série statistique

Définition 8
L'écart-type d'une série statistique X, noté $\sigma(X)$, est la racine carrée de la variance de cette série :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Exemple 16
L'écart-type de la **série B** vaut : $\sigma(X) = \sqrt{109561} = 331$.

Propriété 4
La variance et l'écart-type présentent les propriétés suivantes :

- La variance et l'écart-type sont des nombres positifs ou nuls,
- Une variance nulle ou un écart-type nul signifient que toutes les valeurs de la série son égales à sa moyenne,
- Plus la variance (ou l'écart-type) d'une série est grande, plus cette série est dispersée autour de sa moyenne,