Lois de probabilité continues

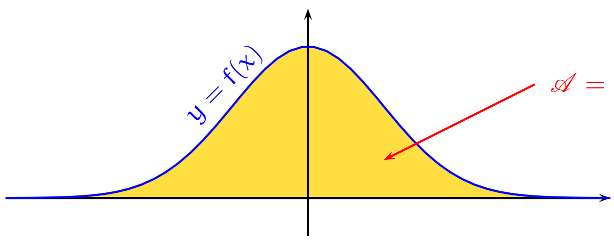
I. Densité de probabilité et loi de probabilité

1) Variable aléatoire continue

Une variable aléatoire qui peut prendre comme valeurs tous les nombres réels d'un certain intervalle I de $\mathbb{R}$ est dite continue.

2) Densité de probabilité

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
f est une **fonction densité** si et seulement si
- f est une fonction positive sur $\mathbb{R}$
- f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en un nombre fini de points
- l'aire du domaine $\mathscr{D}$ délimité par la courbe représentative de f et l'axe des abscisses est égale à 1.



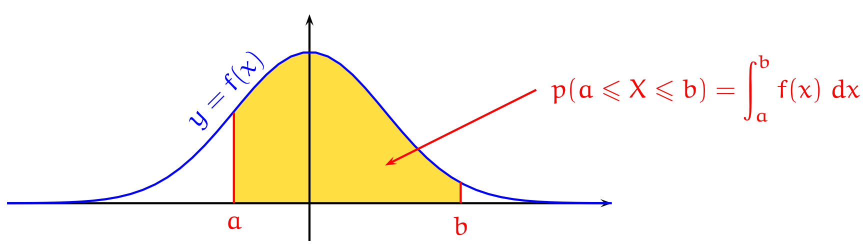
L'égalité $\mathscr{A} = 1$ peut encore s'écrire $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$ ou $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt = 1$ ou $\displaystyle\lim_{x\to-\infty,\ y\to+\infty} \int_x^y f(t)\,dt = 1$.

3) Probabilité d'un événement. Fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire de densité f.

La probabilité de l'événement $X \in [a, b]$ est $p(a \leqslant X \leqslant b) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$.

La probabilité de l'événement $X \in]-\infty, a]$ est $p(X \leqslant a) = \displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(t)\,dt = \lim_{x\to-\infty} \int_x^a f(t)\,dt$.



La fonction $x \mapsto p(X \in]-\infty, x]) = p(X \leqslant x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ est la **fonction de répartition** de la variable aléatoire X.

Une fonction de répartition est toujours continue sur $\mathbb{R}$.

Remarques.
- Pour tout réel x, $p(X = x) = 0$.
- Pour tous réels a et b, $p(a \leqslant X \leqslant b) = p(a < X \leqslant b) = p(a \leqslant X < b) = p(a < X < b)$ et $p(X \leqslant a) = p(X < a)$.

4) Espérance et variance d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire de densité f.

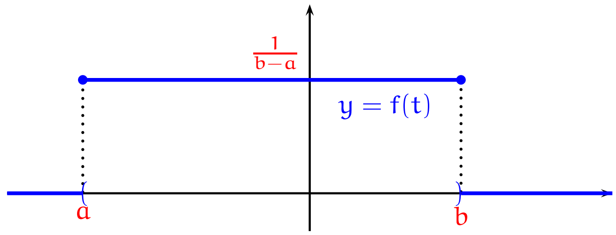
- L'**espérance** de X est $E(X) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} tf(t)\,dt$ et la variance de X est $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$.

II. Deux exemples de lois continues

1) La loi uniforme

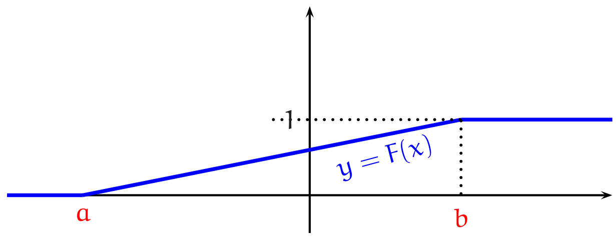
- La loi uniforme sur $[a, b]$ est la loi de probabilité dont la densité est la fonction f définie par :

$$\text{pour tout réel } t,\ f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} \text{ si } t \in [a, b] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$



• La fonction de répartition de la loi uniforme sur $[a, b]$ est la fonction F définie par :

$$\text{pour tout réel } x,\ F(x) = p(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt = \begin{cases} 0 \text{ si } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} \text{ si } a \leqslant x \leqslant b \\ 1 \text{ si } x > b \end{cases}.$$



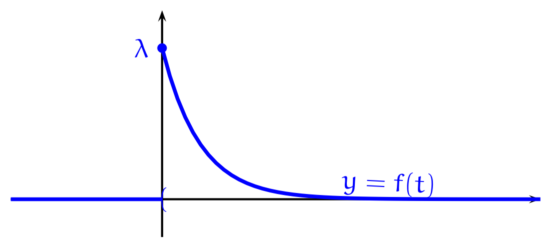
• Si c et d sont deux réels tels que $a \leqslant c \leqslant d \leqslant b$, $p(c \leqslant X \leqslant d) = \displaystyle\int_{c}^{d} \frac{1}{b-a}\ dt = \frac{d-c}{b-a}$.

• L'espérance de la loi uniforme sur $[a, b]$ est $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$.

2) La loi exponentielle de paramètre λ

• La loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ est la loi de probabilité dont la densité est la fonction f définie par :

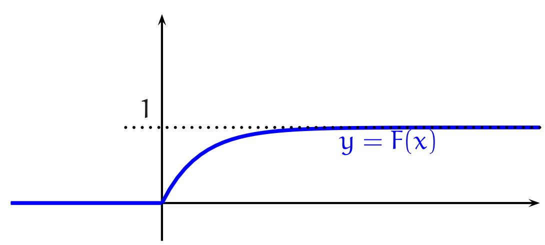
$$\text{pour tout réel } t,\ f(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} \text{ si } t \geqslant 0 \end{cases}.$$



• La fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ est la fonction F définie par :

$$\text{pour tout réel } x,\ F(x) = p(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} \text{ si } x \geqslant 0 \end{cases}.$$

On a aussi $p(X \geqslant x) = p(X > x) = 1 - p(X \leqslant x) = e^{-\lambda x}$.



• L'espérance de la loi exponentielle de paramètre λ est $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.

• La loi exponentielle de paramètre λ est « sans vieillissement » :

$$\text{pour tous réels positifs } t \text{ et } s,\ p_{X \geqslant t}(X \geqslant t+s) = p(X \geqslant s).$$

