Lois de probabilité discrètes

I. Loi de probabilité associée à une variable aléatoire discrète

On suppose que Ω est un univers fini constitué de n résultats possibles. On suppose de plus qu'à chaque résultat possible $\omega_1, \ldots, \omega_n$ est associé un nombre réel $x_1, \ldots, x_n$. On définit ainsi une variable aléatoire X (une variable aléatoire est donc une fonction qui à un résultat ω_i associe un nombre x_i ou encore une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$). La loi de probabilité de la variable X est la liste des probabilités $p(X = x_1), \ldots, p(X = x_n)$. Elle peut être représentée dans un tableau.

x_1	x_2	...	x_n
$p(X = x_1)$	$p(X = x_2)$	...	$p(X = x_n)$

Propriétés. Pour chaque i, $0 \leqslant p(X = x_i) \leqslant 1$ et $p(X = x_1) + p(X = x_2) + \ldots + p(X = x_n) = 1$.

II. Espérance, variance et écart-type d'une variable aléatoire discrète

Soit X une variable aléatoire prenant n valeurs x_1, x_2,...,x_n avec les probabilités p_1, p_2,..., p_n.
L'**espérance mathématique** de X est :

$$E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n.$$

La **variance** de X est :

$$V(X) = p_1 \times (x_1 - E(X))^2 + p_2 \times (x_2 - E(X))^2 + \ldots + p_n \times (x_n - E(X))^2 = E\left((X - E(X))^2\right).$$

Résultat admis : $V(X) = (p_1x_1^2 + p_2x_2^2 + \ldots + p_nx_n^2) - (E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2$.
L'**écart-type** de X est :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

III. Exemples de lois discrètes

1) Loi équirépartie

La loi est dite équirépartie quand toutes les valeurs de X ont la même probabilité d'apparition.
Dans ce cas : $p(X = x_1) = p(X = x_2) = \ldots = p(X = x_n) = \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{\text{card}\Omega}$

2) Loi binomiale (ou loi de Bernoulli)

Epreuve de Bernoulli

Une épreuve de Bernoulli est une épreuve à deux éventualités (succès et échec, pile et face, blanc et pas blanc, obtenir le 1 ou pas quand on jette un dé...) dont les probabilités respectives sont notées p et $1 - p$ (p étant un réel élément de $[0, 1]$). Une telle épreuve est appelée épreuve de Bernoulli de paramètre p.

Schéma de Bernoulli

Une expérience aléatoire consistant à répéter n fois (n étant un entier naturel non nul), de manière indépendante, une même épreuve de Bernoulli de paramètre p s'appelle un schéma de Bernoulli de paramètres n et p.

Loi binomiale

A un schéma de Bernoulli de paramètre n et p, on peut associer la variable aléatoire X égale au nombre de succès en n tentatives. Cette variable aléatoire prend donc les valeurs 0, 1, 2, $\ldots$, $n - 1$, n. La loi binomiale est la loi de probabilité associée à cette variable aléatoire et si k est un entier élément de $\{0, 1, \ldots, n\}$, on a

$$p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Espérance variance et écart-type de la loi binomiale

L'espérance de la loi binomiale de paramètre n et p est $E(X) = np$ et la variance de la loi binomiale de paramètre n et p est $V(X) = np(1 - p)$.