Théorème de Pythagore

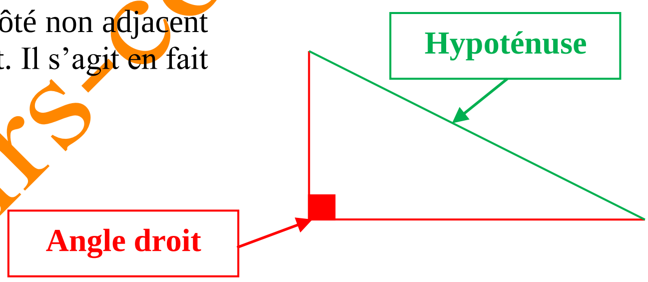
Exercices corrigés

Sont abordés dans cette fiche :

- **Exercice 1 :** calcul de la longueur de l'hypoténuse
- **Exercice 2 :** calcul de la longueur d'un côté adjacent à l'angle droit
- **Exercice 3 :** calcul de longueurs dans un triangle quelconque muni d'une hauteur
- **Exercice 4 :** mesure de la diagonale d'un carré de côté a
- **Exercice 5 :** aire et périmètre d'un quadrilatère
- **Exercice 6 :** cercle circonscrit à un triangle, aire d'un disque et périmètre d'un cercle
- **Exercice 7 :** tangente à un cercle

Rappel : Hypoténuse dans un triangle

Dans un triangle rectangle, **L'HYPOTÉNUSE** est le côté non adjacent à l'angle droit, c'est-à-dire le côté opposé à l'angle droit. Il s'agit en fait du côté le plus long de ce triangle.

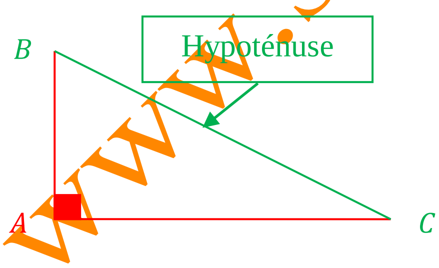


Rappel : Théorème de Pythagore

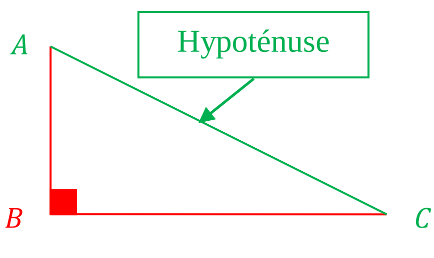
Si un triangle est rectangle, alors, d'après le **THÉORÈME DE PYTHAGORE**, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

Autrement dit, d'après le théorème de Pythagore, on a l'égalité suivante :

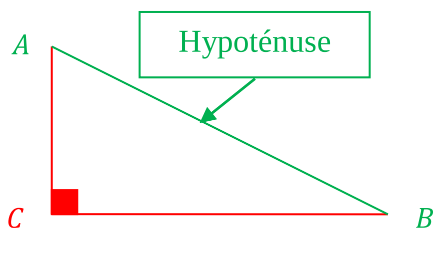
$$hypoténuse^2 = (1^{er}\ côté\ de\ l'angle\ droit)^2 + (2^{ème}\ côté\ de\ l'angle\ droit)^2$$



Le triangle ABC est rectangle en A donc, d'après le théorème de Pythagore : $BC^2 = AB^2 + AC^2$



Le triangle ABC est rectangle en B donc, d'après le théorème de Pythagore : $AC^2 = BA^2 + BC^2$



Le triangle ABC est rectangle en C donc, d'après le théorème de Pythagore : $AB^2 = CA^2 + CB^2$

Attention ! Le théorème de Pythagore ne s'applique que dans un triangle rectangle.

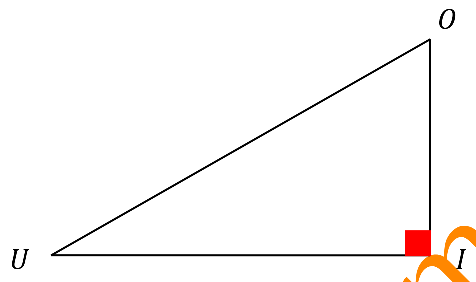
A quoi sert le théorème de Pythagore ?

- à calculer une longueur

Exercice 1 *(1 question)* — *Niveau : facile*

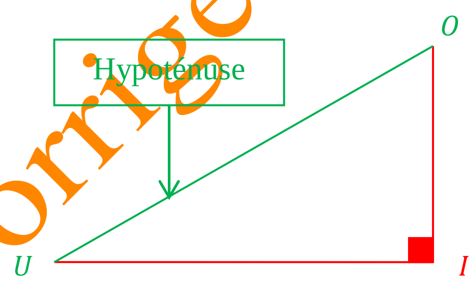
Soit un triangle OUI rectangle en I, tel que $OI = 30\ mm$ et $UI = 40\ mm$.

Calculer OU.



Correction de l'exercice 1

Analysons tout d'abord la figure et récapitulons les informations fournies par l'énoncé.



- Le codage de la figure montre clairement que l'angle $\widehat{OIU}$ est un angle droit, donc que le triangle OUI est rectangle en I.
- L'énoncé indique également que le triangle OUI est rectangle en I.
- Par ailleurs, on connaît deux longueurs, celles des côtés $[OI]$ et $[UI]$ de l'angle droit.
- L'hypoténuse du triangle est le segment $[OU]$: ce côté est en effet opposé à l'angle droit.

Remarques importantes à prendre en compte dans tout exercice de géométrie :

- Dans cet exercice, l'unité de longueur est commune à tous les segments puisqu'il s'agit du millimètre. Il ne faut jamais oublier d'exprimer chacune des mesures dans la même unité afin de ne pas fausser les calculs.
- Ne pas confondre les écritures $[OU]$ et OU. En effet, $[OU]$ désigne un segment alors que OU désigne une distance.

Proposons désormais une correction détaillée de l'exercice, étape par étape.

- **1ère étape : On repère ce qu'on pourrait appeler « la configuration de Pythagore ».**

D'après l'énoncé, le triangle OUI est rectangle en I et a donc pour hypoténuse le côté $[OU]$.

- **2ème étape : On précise le théorème auquel on va faire appel.**

Donc, d'après le théorème de Pythagore, on a l'égalité suivante :

- **3ème étape : On applique le théorème de Pythagore en prenant le soin de bien écrire l'égalité.**

$$\underbrace{OU^2}_{hypoténuse^2} = \underbrace{IO^2}_{(1^{er}\ côté\ \ de\ l'angle\ droit)^2} + \underbrace{IU^2}_{(2^{ème}\ côté\ \ de\ l'angle\ droit)^2}$$

- **4ème étape : On remplace les longueurs connues par leurs mesures respectives, exprimées dans la même unité.**

$OU^2 = 30^2 + 40^2$

- **5ème étape : On résout l'équation.**

Pour tous nombres positifs A et B,

$\sqrt{A \times B} = \sqrt{A} \times \sqrt{B}$

$OU^2 = 30^2 + 40^2$

$OU^2 = 900 + 1600$

$OU^2 = 2500$

Par conséquent, on a :

$OU = \sqrt{OU^2} = \sqrt{2500} = \sqrt{25 \times 100} = \sqrt{25} \times \sqrt{100} = 5 \times 10 = 50$

OU désigne une longueur, donc elle est positive. On cherche donc le nombre positif qui, élevé au carré, donne 2500. Ce nombre s'appelle la **RACINE CARRÉE** de 2500 et se note $\sqrt{2500}$.

- **6ème étape : On conclut.**

La longueur de l'hypoténuse $[OU]$, notée OU, est égale à $50\ mm$.

Remarque : Il faut toujours veiller à écrire le résultat exact, sauf si l'énoncé invite à donner une valeur approchée, sans oublier d'indiquer l'unité (s'il y a une unité !).

Proposons désormais une correction pouvant être notée sur la copie.

D'après l'énoncé et d'après le codage de la figure, le triangle OUI est rectangle en I. Le côté $[OU]$ désigne donc l'hypoténuse du triangle.

Donc, d'après le théorème de Pythagore, on a l'égalité suivante :

$OU^2 = IO^2 + IU^2$

D'où, en remplaçant les longueurs connues par leurs mesures respectives, exprimées dans la même unité :

$OU^2 = 30^2 + 40^2$

$OU^2 = 900 + 1600$

$OU^2 = 2500$

Par conséquent, on a :

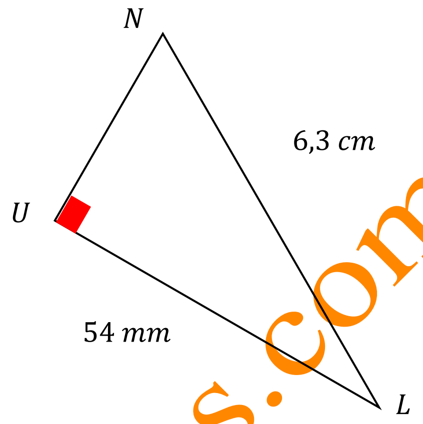
$$OU = \underbrace{\sqrt{2500} = 50}_{\substack{la\ calculatrice \\ affiche\ un\ résultat \\ exact\ :\ 50}}$$

Par conséquent, dans le triangle OUI rectangle en I, $\boxed{\text{l'hypoténuse } [OU] \text{ mesure } 50\ mm}$.

Exercice 2 *(1 question)* — *Niveau : facile*

Soit la figure NUL ci-contre.

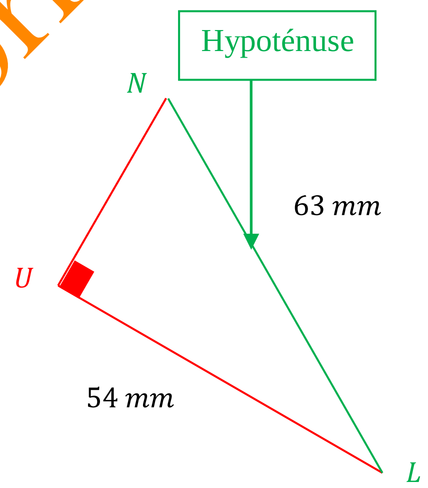
Donner la valeur exacte de NU et une valeur approchée de NU au millimètre près.



Correction de l'exercice 2

Commençons par exprimer les longueurs dans la même unité (par exemple en millimètres, notamment afin d'obtenir des nombres entiers naturels et donc afin de faciliter par la suite les calculs).

- $NL = 6{,}3\ cm = 63\ mm$
- $UL = 54\ mm$



D'après la figure, le triangle NUL est rectangle en U.

Donc, d'après le théorème de Pythagore, on a l'égalité suivante :

$NL^2 = NU^2 + UL^2$

C'est-à-dire, en remplaçant les longueurs connues par leurs mesures respectives :

$63^2 = NU^2 + 54^2$

D'où :

$63^2 - 54^2 = NU^2 + 54^2 - 54^2$ (on soustrait dans chaque membre 54^2 afin de n'avoir que NU^2 dans le membre à droite du signe $=$)
$63^2 - 54^2 = NU^2$ (car $54^2 - 54^2 = 0$)
$NU^2 = 63^2 - 54^2$
$NU^2 = 3969 - 2916$
$NU^2 = 1053$

Si $A \geq 0$ et $B \geq 0$

$\sqrt{A \times B} = \sqrt{A} \times \sqrt{B}$

Il en résulte que :

$$NU = \sqrt{NU^2} = \underbrace{\sqrt{1053} = \sqrt{9 \times 117}}_{\substack{la\ somme\ des\ chiffres \\ du\ nombre\ 1053 \\ est\ divisible\ par\ 9 \\ donc\ le\ nombre\ 1053 \\ est\ un\ multiple\ de\ 9}} = \sqrt{9} \times \sqrt{117} = \underbrace{3 \times \sqrt{117} = 3 \times \sqrt{9 \times 13}}_{\substack{la\ somme\ des\ chiffres \\ du\ nombre\ 117 \\ est\ divisible\ par\ 9 \\ donc\ le\ nombre\ 117 \\ est\ un\ multiple\ de\ 9}} = 3 \times \sqrt{9 \times 13}$$

$NU = 3 \times \sqrt{9} \times \sqrt{13} = 3 \times 3 \times \sqrt{13} = 9\sqrt{13}$

En conclusion, $\boxed{NU = 9\sqrt{13}\ mm \text{ (valeur exacte)}}$.

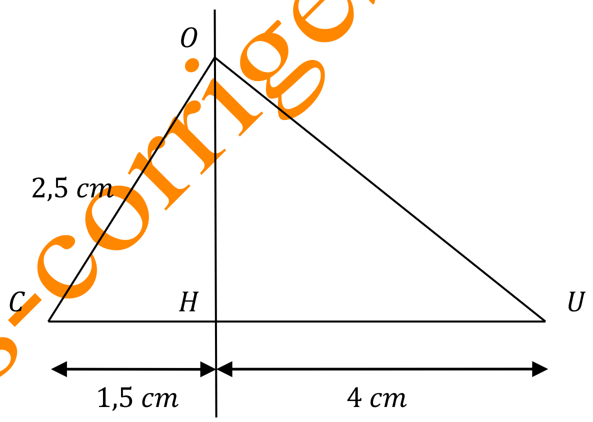
Avec la calculatrice, en tapant $9\sqrt{13}$, on obtient $32{,}44996147$ …. Ainsi, $\boxed{NU \approx 32\ mm}$ (valeur approchée arrondie au millimètre près par défaut).

Remarque : On peut également écrire $NU \approx 3{,}2\ cm$ (valeur approchée arrondie au millimètre près par défaut).

Exercice 3 *(2 questions)* — *Niveau : moyen*

Sur la figure ci-contre, (HO) représente une hauteur du triangle COU.

Calculer HO et en déduire une valeur approchée au millimètre près de la longueur du segment $[OU]$.



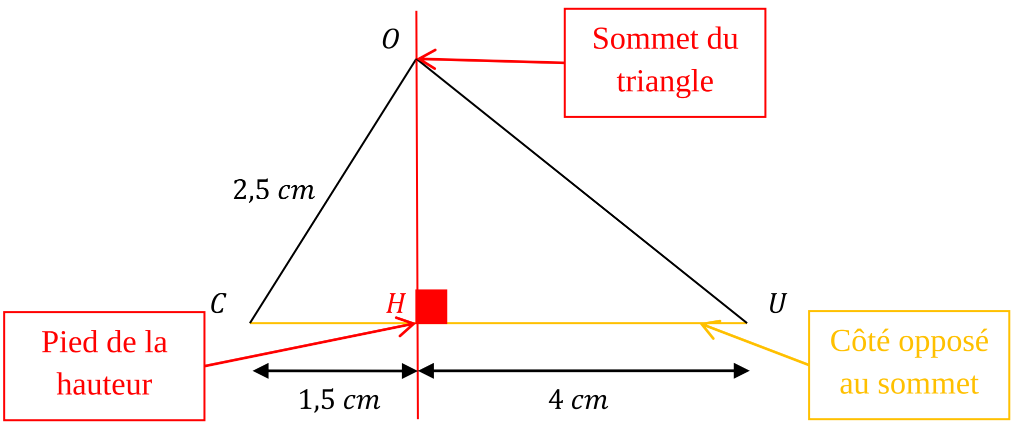
Correction de l'exercice 3

Rappel : Hauteur dans un triangle

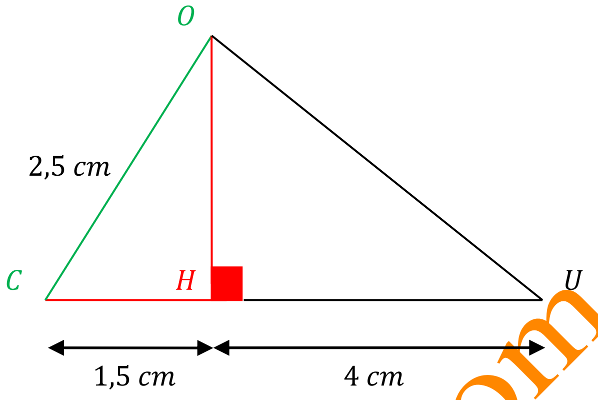
Une **HAUTEUR** est une droite qui passe par un sommet et qui est perpendiculaire au côté opposé. Dans un triangle non aplati, il existe donc 3 hauteurs, concourantes en un point unique appelé **ORTHOCENTRE** du triangle.

Sur la figure proposée, (HO) représente une hauteur du triangle COU.

Autrement dit, la droite (HO) est perpendiculaire à (CU), ce qui signifie que les triangles CHO et HOU sont tous les deux des triangles rectangles en H.



1- Commençons par calculer HO.



Nous venons de montrer que le triangle CHO est rectangle en H donc, d'après le théorème de Pythagore, on a l'égalité suivante :

$OC^2 = HO^2 + HC^2$

En remplaçant les longueurs connues par leurs mesures respectives, on obtient :

$2{,}5^2 = HO^2 + 1{,}5^2$

D'où :

$HO^2 = 2{,}5^2 - 1{,}5^2$
$HO^2 = 6{,}25 - 2{,}25$
$HO^2 = 4$

$2{,}5^2 = HO^2 + 1{,}5^2$

$2{,}5^2 - 1{,}5^2 = HO^2 + 1{,}5^2 - 1{,}5^2$

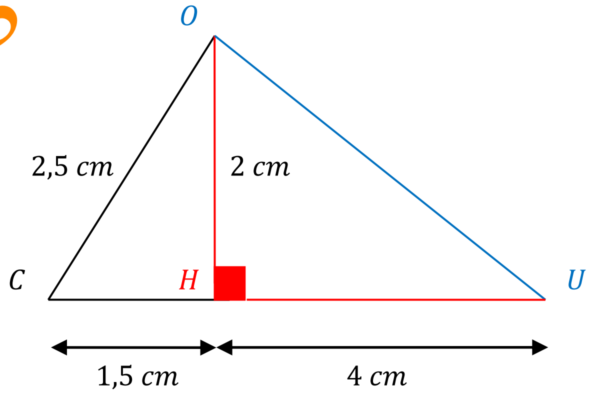
$2{,}5^2 - 1{,}5^2 = HO^2$

$HO^2 = 2{,}5^2 - 1{,}5^2$

Il s'ensuit que : $HO = \sqrt{HO^2} = \sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2$

Le segment $[HO]$ mesure $2\ cm$.

2- Calculons désormais OU.



Nous avons montré que, comme (HO) représente une hauteur du triangle COU, HOU est rectangle en H.

Comme le triangle HOU est rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore, l'égalité suivante est vérifiée :

$OU^2 = HO^2 + HU^2$

En remplaçant les longueurs connues par leurs mesures respectives, on obtient :

$OU^2 = 2^2 + 4^2 = 4 + 16 = 20$

Par conséquent,

$2\sqrt{5} \approx 4{,}472135935\ldots$

$OU = \sqrt{OU^2} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

$[OU]$ mesure $2\sqrt{5}\ cm$ (valeur exacte), soit $4{,}5\ cm$ (valeur arrondie au millimètre près par excès).

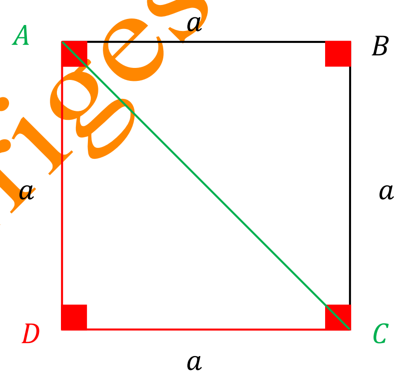
Exercice 4 *(2 questions)* — *Niveau : moyen*

Soit un carré de côté a.

1- Calculer, en fonction de a, la longueur de ses diagonales.
2- D'après la question précédente, combien mesure alors la diagonale d'un carré d'aire $100\ m^2$?

Correction de l'exercice 4

1- La figure ci-contre représente un carré $ABCD$ de côté a.



$ABCD$ est un carré dont les diagonales sont donc $[AC]$ et $[BD]$, toutes deux de même longueur.

Un carré est un quadrilatère possédant 4 angles droits et des côtés de même mesure.

On a donc en particulier :

- ADC est un triangle rectangle en D
- $DA = DC = a$

ADC est un triangle rectangle en D donc, d'après le théorème de Pythagore, on a l'égalité suivante :

$$AC^2 = DA^2 + DC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

D'où :

$$AC = \sqrt{AC^2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2} \times \sqrt{a^2} = \sqrt{2} \times a = a\sqrt{2}$$

En conclusion, $\boxed{\text{dans un carré de côté } a\text{, les diagonales mesurent } a\sqrt{2}}$.

2- Déterminons la mesure de la diagonale d'un carré d'aire $100\ m^2$.

Rappel : Périmètre et aire d'un carré de côté c

- $Périmètre = 4 \times c$
- $Aire = c \times c = c^2$

Soit $\mathcal{A}$ l'aire d'un carré de côté a. Alors, $\mathcal{A} = a^2$.

Ici, $\mathcal{A} = 100$ donc $a^2 = 100$. Ainsi, $a = \sqrt{a^2} = \sqrt{100} = \sqrt{10^2} = 10$.

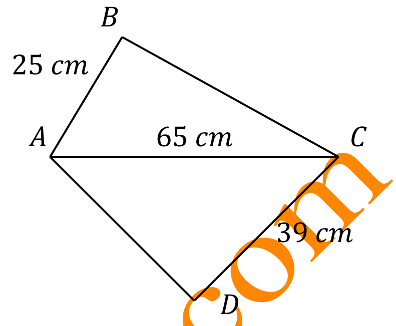
Un carré d'aire $100\ m^2$ a pour côtés des segments mesurant $10\ m$.

D'après la question 1-, si un carré a pour côté $a\ mètres$, alors ses diagonales mesurent $a\sqrt{2}\ mètres$. Comme ici, $a = 10$, $\boxed{\text{les diagonales du carré mesurent } 10\sqrt{2}\ mètres}$.

Exercice 5 *(1 question)* — *Niveau : moyen*

On considère la figure ci-contre.
Les triangles ADC et ABC sont respectivement rectangles en D et en B.

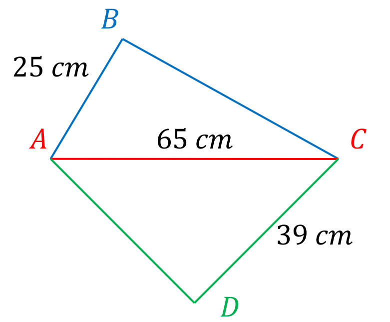
Calculer l'aire et le périmètre du quadrilatère $ABCD$.



Correction de l'exercice 5

Commençons par déterminer la mesure de chacun des segments qui composent le quadrilatère $ABCD$.

D'après l'énoncé, le triangle ABC est rectangle en B donc, d'après le théorème de Pythagore, on a l'égalité suivante :
$AC^2 = BA^2 + BC^2$



D'où, en remplaçant les longueurs connues par leurs mesures respectives :
$65^2 = 25^2 + BC^2$

C'est-à-dire :
$BC^2 = 65^2 - 25^2 = 4225 - 625 = 3600$

Par conséquent :
$BC = \sqrt{BC^2} = \sqrt{3600} = 60$

BC mesure donc 60 cm.

D'après l'énoncé, le triangle ADC est rectangle en D donc, d'après le théorème de Pythagore, on a l'égalité suivante :
$AC^2 = DA^2 + DC^2$

D'où, en remplaçant les longueurs connues par leurs mesures respectives :
$65^2 = DA^2 + 39^2$

C'est-à-dire :
$DA^2 = 65^2 - 39^2 = 4225 - 1521 = 2704$

Par conséquent :
$DA = \sqrt{DA^2} = \sqrt{2704} = 52$

DA mesure donc 52 cm.

Rappel : Périmètre d'un quadrilatère quelconque

Le périmètre d'un quadrilatère, quel qu'il soit, est égal à la somme de la mesure de ses 4 côtés. Ainsi, si $ABCD$ est un quadrilatère, le périmètre $\mathcal{P}_{ABCD}$ du quadrilatère $ABCD$ est donné par la formule :

$$\mathcal{P}_{ABCD} = AB + BC + CD + DA$$

Dès lors, il est possible de calculer le périmètre $\mathcal{P}_{ABCD}$ du quadrilatère $ABCD$.

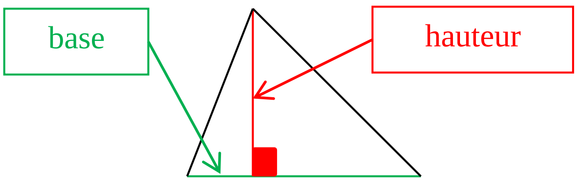
$\mathcal{P}_{ABCD} = AB + BC + CD + DA = 25 + 60 + 39 + 52 = 176$

$\boxed{\text{Le périmètre du quadrilatère } ABCD \text{ est égal à } 176\ cm}$.

Rappel : Aire d'un quadrilatère quelconque et d'un triangle

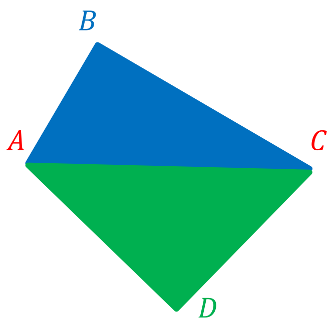
- Pour calculer l'aire d'un quadrilatère quelconque, c'est-à-dire l'aire d'un polygone à 4 côtés non particulier, il convient de décomposer son aire en aires de polygones particuliers (comme des carrés, des rectangles, des losanges, des trapèzes, des parallélogrammes ou des triangles). L'aire du quadrilatère quelconque est alors égale à la somme des différentes aires qui le composent.
- L'aire $\mathcal{A}$ d'un triangle est donnée par la formule :

$$\mathcal{A} = \frac{base \times hauteur}{2}$$



L'aire d'un triangle rectangle est donnée par le produit des longueurs des côtés de l'angle droit, que divise 2.

Calculons enfin l'aire $\mathcal{A}_{ABCD}$ du quadrilatère $ABCD$.



L'aire $\mathcal{A}_{ABCD}$ du quadrilatère $ABCD$ se compose de l'aire $\mathcal{A}_{ABC}$ du triangle ABC et de l'aire $\mathcal{A}_{ADC}$ du triangle ADC.

Autrement dit, l'aire $\mathcal{A}_{ABCD}$ est égale à la somme des aires $\mathcal{A}_{ABC}$ et $\mathcal{A}_{ADC}$.

C'est-à-dire :

$\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{ABC} + \mathcal{A}_{ADC} = \frac{AB \times BC}{2} + \frac{AD \times DC}{2}$

$= \frac{25 \times 60}{2} + \frac{52 \times 39}{2} = 750 + 1014 = 1764$

$\boxed{\text{L'aire du quadrilatère } ABCD \text{ est égale à } 1764\ cm^2}$.