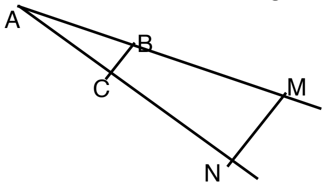
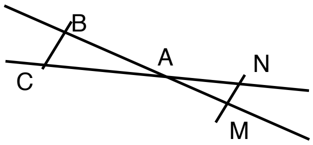
Ce qui est actuellement enseigné sous le nom « Théorème de Thalès ».

Il s'agit d'une conséquence de la propriété suivante :

Dans un agrandissement, toutes les longueurs sont multipliées par le même nombre.

Considérons deux droites sécantes et deux autres droites, parallèles entre elles mais sécantes avec les précédentes. Ces droites forment deux triangles dont l'un est un agrandissement de l'autre.





Le triangle AMN est un agrandissement (ou une réduction) du triangle ABC. Pour obtenir les longueurs des côtés de AMN, on multiplie les longueurs des côtés de ABC par un même nombre k.
On a donc AM = k AB, AN = k AC, et MN = k BC

Par conséquent, $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$ puisque ces trois rapports sont égaux à k.

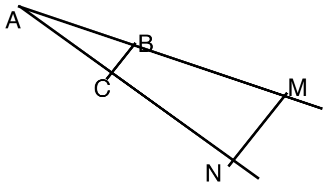
Cette version du théorème de Thalès permet de calculer la longueur des segments situés sur les parallèles, mais impose d'utiliser les côtés des triangles : les segments [BM] et [CN] n'interviennent pas dans les rapports.

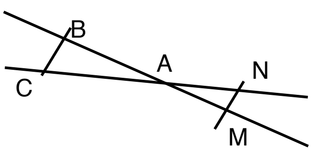
On peut l'énoncer ainsi :

Soit un triangle ABC, si M est un point de (AB), N un point de (AC), et si (MN) est parallèle à (BC) , alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

Réciproque du théorème de Thalès.

La proprieté énoncée ci dessous est connue sous le nom de « réciproque du théorème de Thalès », bien qu'elle n'en soit pas réellement la réciproque.
Elle permet dans les configurations suivantes de prouver éventuellement que les droites qui semblent parallèles le sont réellement.





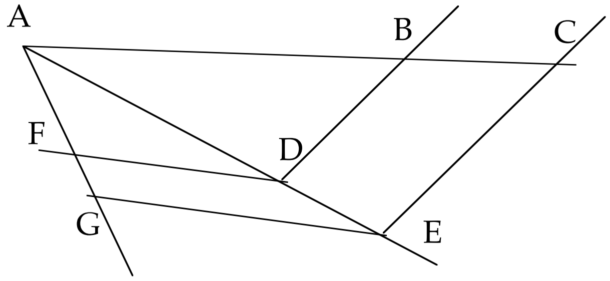
Si deux triangles ABC et AMN sont tels que :

A, B et M sont alignés,

A, C et N sont alignés dans le même ordre que A, B et M,

Si de plus $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ **,** **alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles.**

Exemple de rédaction d'exercice utilisant le théorème de Thalès et sa réciproque :



Les points A,B et C sont alignés, ainsi que les points A,D et E et les points A, F et G.
On a d'autre part (BD)//(CE) et (DF)//(EG).
Démontrer que les droites (BF) et (CG) sont parallèles.

Dans le triangle AFD, G est un point de (AF), E est un point de (AD) et (GE)//(FD),

alors $\frac{AF}{AG} = \frac{AD}{AE}$

Dans le triangle ABD, C est un point de (AB), E est un point de (AD) et (CE)//(BD),

alors $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}$

On a $\frac{AF}{AG} = \frac{AD}{AE}$ et $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}$ par conséquent $\frac{AB}{AC} = \frac{AF}{AG}$

Les triangles ABF et ACG sont tels que :
A, B et C sont alignés. A, F et G sont alignés dans le même ordre que A, B et C
De plus on a $\frac{AB}{AC} = \frac{AF}{AG}$ donc les droites (BF) et (CG) sont parallèles.

Quelques questions fréquemment posées :

Comment mémoriser les rapports qui sont égaux ?

On peut utiliser les remarques suivantes :
Les numérateurs des trois rapports égaux sont les trois côtés d'un même triangle.
Les dénominateurs des trois rapports égaux sont les côtés de l'autre triangle.
Un rapport est formé avec deux côtés situés sur une même droite.
Un deuxième rapport est formé avec deux côtés situés sur ue autre droite.
Le dernier rapport est formé avec deux côtés parallèles.

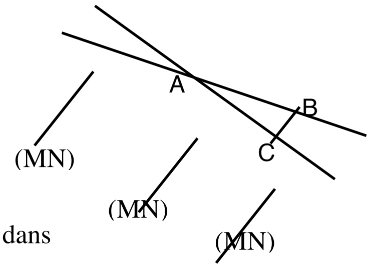
Y-a-t-il un sens imposé pour écrire les rapports ?

Non, bien entendu.

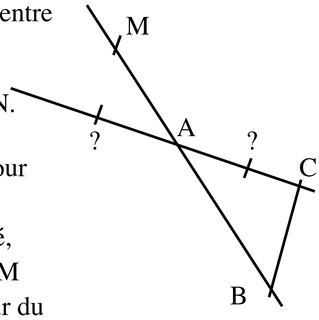
Si cette égalité est vraie : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ celle-ci l'est également : $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN}$

en revanche cette troisième égalité ne l'est pas $\frac{AB}{AM} = \frac{AN}{AC}$

Quand faut-il mentionner que les points sont alignés dans le même ordre ?



Seulement quand on utilise la réciproque du théorème de Thalès.
Voici une figure de Thalès incomplète. On veut placer M sur (AB) et N sur (AC) de telle façon que (MN) soit parallèle à (BC).
Si on choisit de la placer de pour que A soit entre B et M, A sera du même coup entre C et N. Si au contraire on choisit de placer M entre A et B, N sera également entre A et C.
Autrement dit, Le parallélisme des droites (BC) et (MN) assure que A,B et M sont placés dans le même ordre que A, C et N. Il est inutile de s'en soucier.

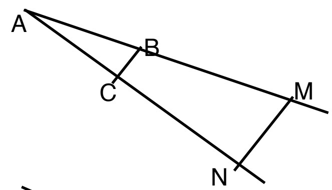


En revanche, si on considère la figure ci-contre, dans laquelle on hésite pour placer le point N entre les deux positions marquées «?». Ces deux points sont équidistants de A.

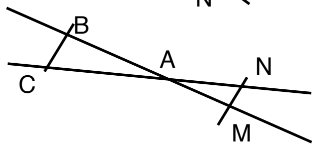
Si $\frac{AB}{AM} = \frac{AN}{AC}$ pour l'une des deux positions de N alors $\frac{AB}{AM} = \frac{AN}{AC}$ pour l'autre position de N.

Pourtant il est clair que (MN)//(BC) n'est vrai que pour l'une des deux positions de N, celle pour laquelle A, qui est entre M et B, est également entre N et C.
L'exigence de mentionner l'ordre de l'alignement des points a pour but de lever cette difficulté, mais elle en introduit une autre : on se contente de constater sur la figure que les points BA et M sont alignés dans le même ordre que C, A et N, on ne le démontre pas. ce qui fait que la rigueur du raisonnement n'est en réalité pas meilleure que si on passe l'ordre sous silence.
C'est néanmoins l'usage en vigueur au collège, qu'on a tout intérêt à suivre au CRPE.

Pourquoi certaines égalités de rapports ne sont-elles pas acceptées alors qu'elles sont exactes ?



Le théorème de Thalès est une façon d'exprimer que, dans certaines conditions (alignement, parallélisme) l'un des deux triangles de chaque figure ci-dessus est un agrandissement de l'autre, or [CN] et [BM] ne sont des côtés ni du triangle ABC ni de AMN, le théorème de Thalès ne dit donc rien à leur propos. Une égalité dans laquelle figure la longueur CN ou la longueur MN ne peut donc en aucun cas être une conséquence du théorème de Thalès.

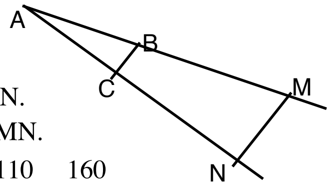


Par exemple l'égalité $\frac{AC}{CN} = \frac{AB}{BM}$ est vraie, mais n'est pas une conséquence du théorème de Thalès enseigné actuellement (c'est une conséquence d'un théorème qui était anciennement désigné comme «théorème de Thalès», cf annexe à la fin de ce document).

Toute rédaction laissant entendre que $\frac{AC}{CN} = \frac{AB}{BM}$ découle du théorème de Thalès est donc fausse.

Si on doit absolument prouver cette égalité, il faut utiliser le calcul à partir des égalités de rapports correctes.

Comment s'y prendre quand on veut calculer une longueur qui ne figure pas dans les rapports du théorème de Thalès ?



AB et M sont alignés, AC et N également, (BC) // (MN), AC = 10, AB = 11, AM = 27. Calculer CN.
Les conditions de l'énoncé permettent d'appliquer le théorème de Thalès aux triangles ABC et AMN.

On a alors $\frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB}$ d'où $\frac{AN}{10} = \frac{27}{11}$ et AN = $\frac{270}{11}$ on en déduit que CN = AN - AC = $\frac{270}{11} - \frac{110}{11} = \frac{160}{11}$

Comment s'y prendre quand on ne connaît, sur une droite, que la longueur qui ne figure pas dans les rapports du théorème de Thalès ?

AB et M sont alignés, AC et N également, (BC) // (MN), CN = 15, AB = 11, AM = 27. Calculer CN.
Les conditions de l'énoncé permettent d'appliquer le théorème de Thalès aux triangles ABC et AMN.
On utilise le fait que AN = AC + CN = AC + 15

On a alors $\frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB}$ d'où $\frac{AC + 15}{AC} = \frac{27}{11}$ on en déduit que 11 (AC + 15) = 27 AC puis que :

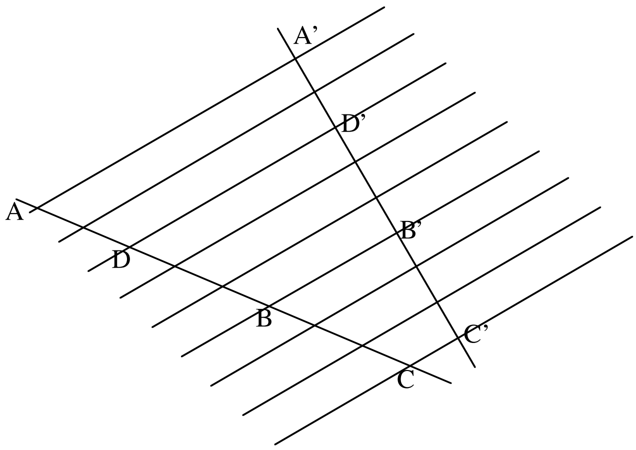
11 AC + 175 = 27 AC ; 175 = 16 AC ; AC = $\frac{175}{16}$

Annexe :

Une propriété anciennement nommée « Théorème de Thalès ».

Cette propriété est fondée sur la propriété suivante :

Des droites parallèles équidistantes découpent une sécante en segments de longueurs égales



Sur l'une des sécantes, si on appelle u la longueur d'un des petits segments, on a :

AB = 5 u et CD = 6 u, donc $\frac{AB}{CD} = \frac{5u}{6u} = \frac{5}{6}$

Sur l'autre sécante, si on appelle v la longueur d'un des petits segments, on a :

A'B' = 5 v et C'D' = 6 v, donc $\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{5v}{6v} = \frac{5}{6}$

On a donc $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$

Il en serait de même si les points ABCD étaient disposés différemment sur la sécante.

Cette version du théorème de Thalès, qui n'est plus enseignée au collège, permettait d'utiliser n'importe quels segments sur les droites sécantes.
En revanche, elle ne donnait aucune information sur les segments situés sur les droites parallèles.

Ce théorème était énoncé sous plusieurs formes, parmi lesquelles la suivante :

Des droites parallèles découpent sur deux sécantes des segments proportionnels.