Agrandissement – Réduction d'un triangle

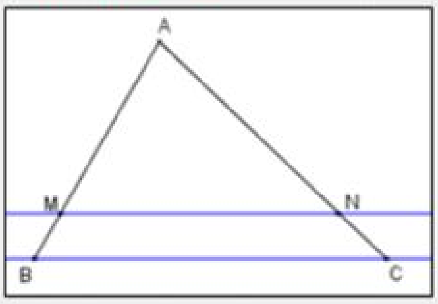
Commentaires sur ce cours :

Ces notions seront de nouveau étudier en classe de 3ème dans la cadre du théorème de THALES.

L'objectif de ce cours est de montrer , à des élèves d'une classe de 4ème , que la droite des milieux permet d'introduire **une formule sur des rapports de longueur puis d'introduire les notions d'agrandissement et de réduction d'une figure géométrique** (la figure géométrique utilisée dans ce cours est un triangle quelconque ABC).

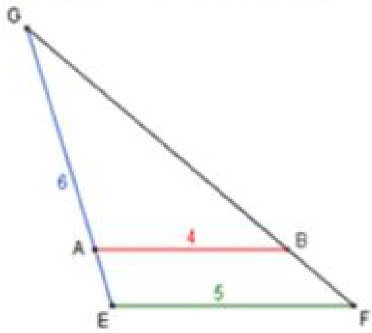
I- Proportionnalité des longueurs dans un triangle

Propriété 1: Dans un triangle ABC, si M est un point de [AB] et N un point de [AC] tel que (MN) est parallèle à (BC) alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.



Application: Calculer une longueur.

Exemple: On considère la figure ci-dessous. Calculer la longueur GA sachant que (AB) // (EF).



Hypothèse: Dans le triangle EFG, A appartient à [GE] et B appartient à [GF]. (AB) // (EF).

Propriété: Dans le triangle EGF, si A appartient à [GE] et B appartient à [GF] tel que (AB) et (EF) sont parallèles alors $\frac{GA}{GE} = \frac{GB}{GF} = \frac{AB}{EF}$.

Conclusion: $\frac{GA}{GE} = \cancel{\frac{GB}{GF}} = \frac{AB}{EF}$ soit $\frac{GA}{6} = \frac{4}{5}$ d'où $GA = \frac{4}{5} \times 6 = \frac{4 \times 6}{5} = \frac{24}{5} = 4{,}8$

Cette partie sera traitée en classe de troisième.

II- Agrandissement et réduction

Propriété 2: Si on multiplie les longueurs d'un figure par k alors son aire est multipliée par k^2.

Application: Calculer une aire.

Exemple: Le parallélépipède rectangle

Si on multiplie la longueur L, la largeur l et le hauteur h par k, on obtient:

$$L' = kL \; ; \; l' = kl \; ; \; h' = kh$$

d'où, d'après le premier paragraphe, on obtient:

- Pour l'aire

$$S' = 2L' \times l' + 2L' \times h' + 2l' \times h' = 2kL \times kl + 2kL \times kh + 2lh \times kh$$
$$S' = 2k^2 \times Ll + 2k^2 \times Lh + 2k^2 \times lh = 2k^2 (Ll + Lh + lh)$$
$$= k^2 \times 2 (Ll + Lh + lh)$$
$$S' = k^2 \times S$$

Quelques conseils pour expliquer ce cours à un élève en classe de 4ème

I) Commencer par tracer un tiangle ABC rectangle en B avec le point M au milieu du segment [A,B] et avec le point N au milieu du segment [A,C] **(voir le dessin n°1 page n°3)**
La droite (MN) s'apelle « droite des milieux » et on a (MN) // (BC)

On a les relations sur les longueurs :

1) AB = 2 AM car M est le point milieu de [A,B]

2) AC = 2 AN car N est le point milieu de [A,C]

3) Et en comparant les 2 longueurs BC et MN ***avec un compas***: on remarque que BC = 2 MN

ET on a *en transformant les expressions obtenues* :

$$AB = 2\,AM \Rightarrow \frac{AB}{AM} = 2 \quad \text{et} \quad AC = 2\,AN \Rightarrow \frac{AC}{AN} = 2 \quad \text{et} \quad BC = 2\,MN \Rightarrow \frac{BC}{MN} = 2$$

Conclusion : on a 3 « *rapports* » égaux *c'est-à-dire* : $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN} = 2$ *et donc aussi* $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$

II) Puis dessiner différents types de triangle ABC avec des points M et N tels que (MN) **//** (BC)
(voir les dessins n°2 , n°3 et n°4 tracés ci-dessous)

On constate qu' on a toujours ces 3 égalités entre ces 3 rapports c'est-à-dire : $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN}$

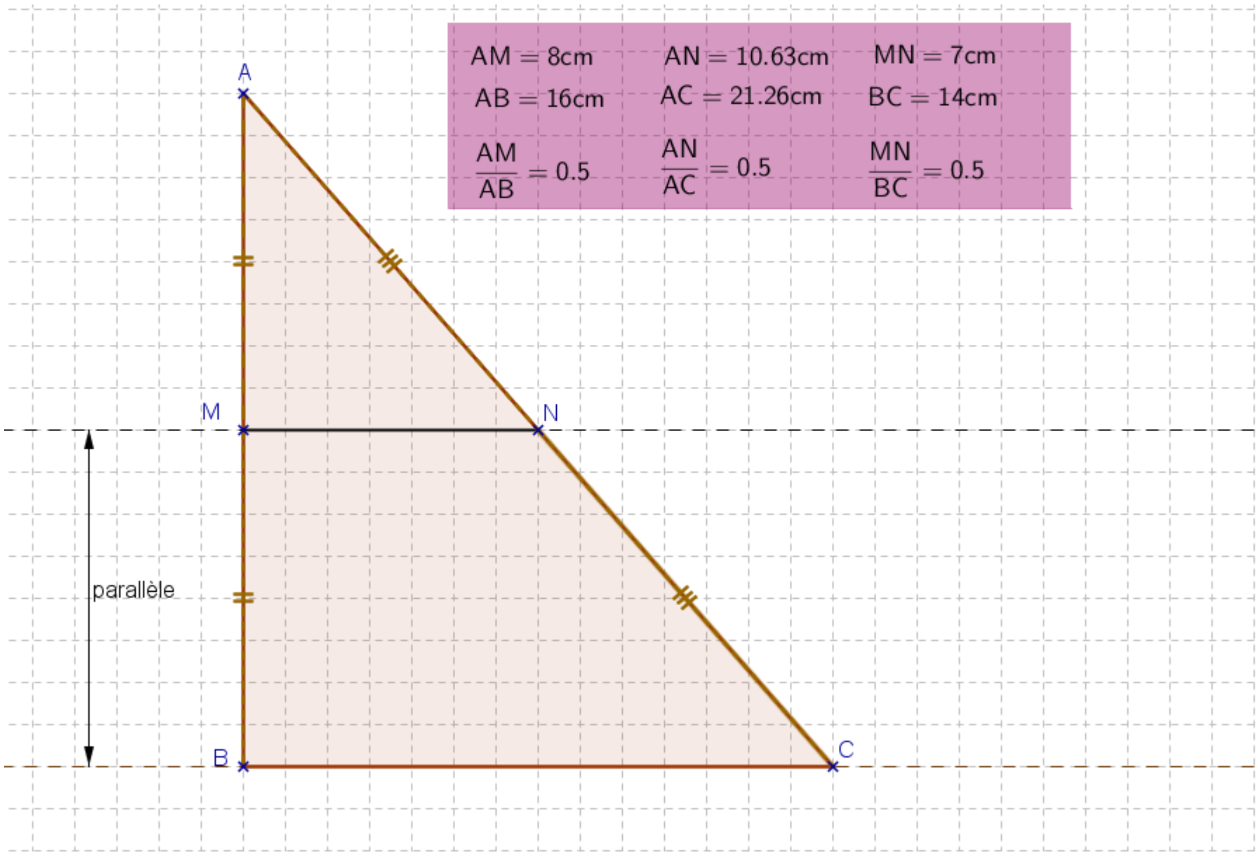
CONCLUSION *(à retenir par cœur)* $M \in [A,B]$

Si dans un triangle ABC on a 2 points $M \in [A,B]$ et $N \in [A,C]$ tels que (MN) // (BC) ALORS

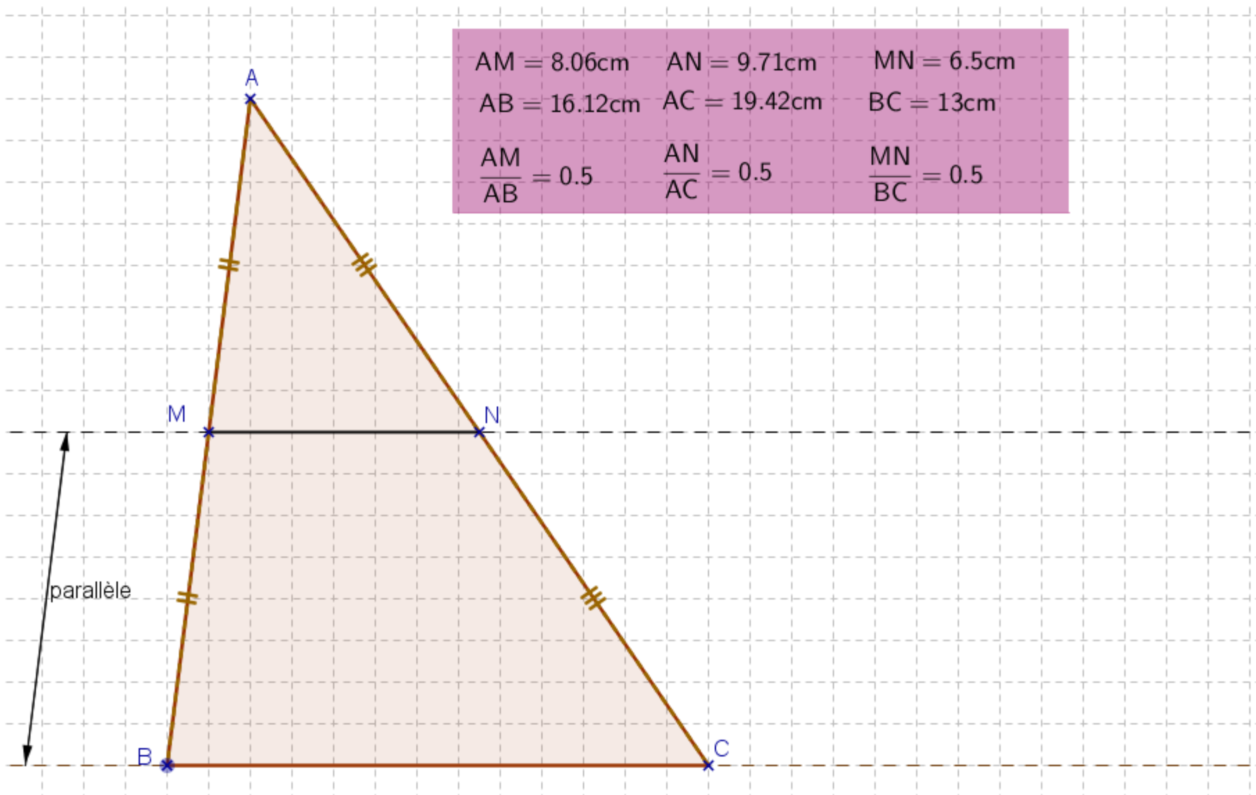
$$\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN} \geq 1 \quad \left(\frac{\text{grands côtés}}{\text{petits côtés}} \right) \Rightarrow$$ ***Agrandissement*** *du triangle* AMN *et on obtient le triangle* ABC

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \leq 1 \quad \left(\frac{\text{petits côtés}}{\text{grands côtés}} \right) \Rightarrow$$ ***Réduction*** *du triangle* ABC *et on obtient le triangle* AMN

Dessin n°1 : Triangle ABC rectangle et (MN) « droite des milieux »

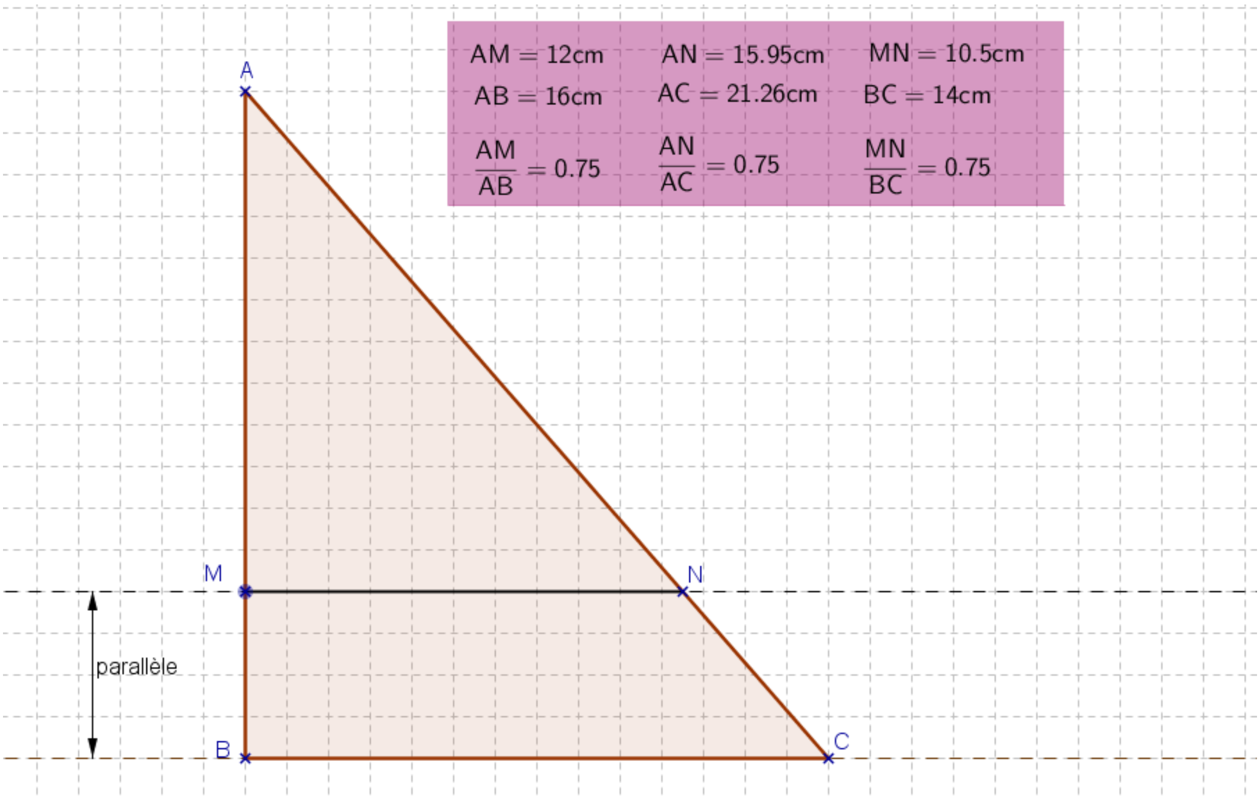


Dessin n°2 : Triangle ABC quelconque et (MN) « droite des milieux »

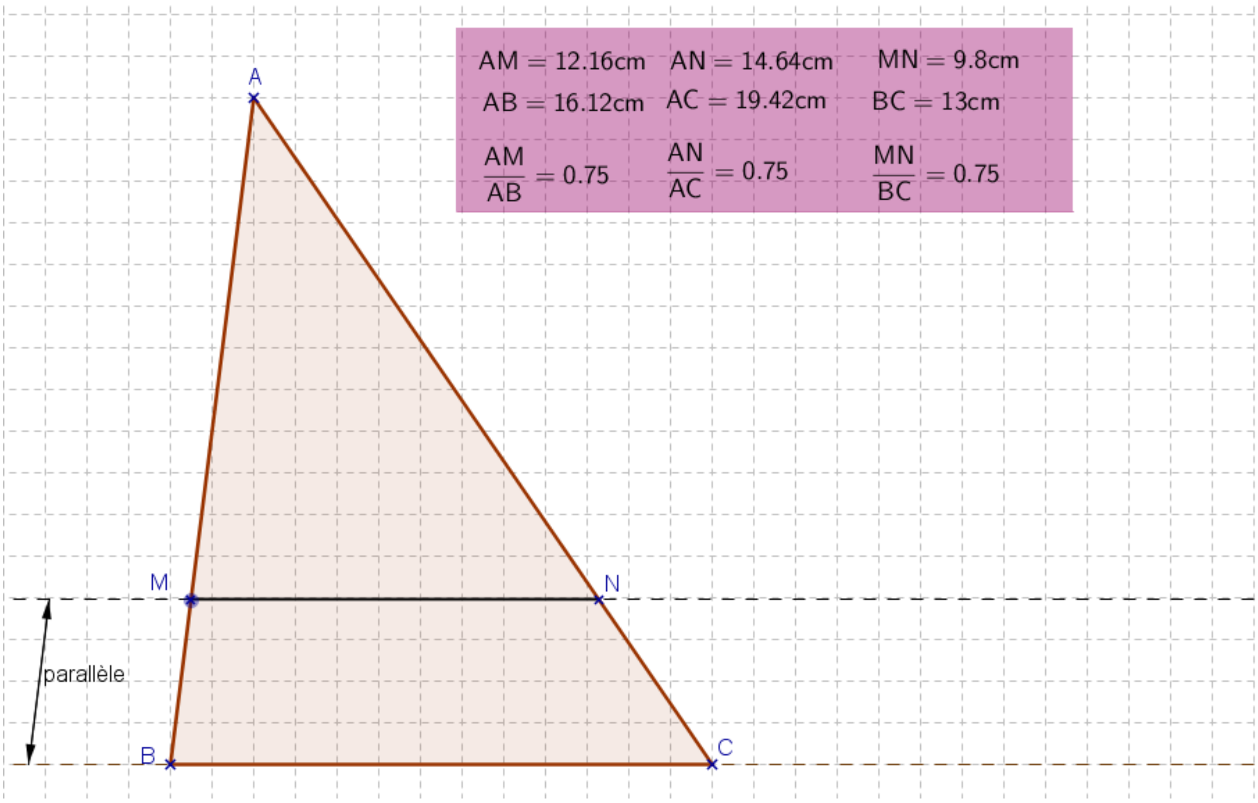


Site : http://francois.schulhof.perso.neuf.fr/cours_maths/

<u>Dessin n°3</u> : Triangle ABC rectangle et M et N tels que (MN) **//** (BC)



<u>Dessin n°4</u> : Triangle ABC quelconque et M et N tels que (MN) **//** (BC)



Site : http://francois.schulhof.perso.neuf.fr/cours_maths/

EXERCICES

<u>Instructions</u> :
Cette formule s'appelle ***la FORMULE DE THALES*** *et le dessin s'appelle une « figure de Thalès »*
Appliquer la formule de Thalès dans les différents dessins décrits ci-dessous
Et compléter le tableau

Figures	Triangles en situation de Thalès	Droites parallèles	Rapports égaux