CHAPITRE 06
Equations, inégalités, factorisation

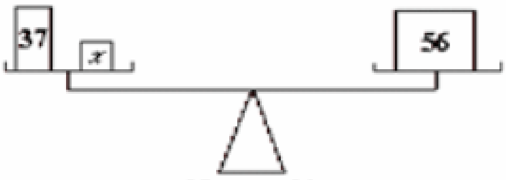
I- Résolution d'une équation

1 - Qu'est-ce qu'une équation ?

Une équation est une égalité qui comporte un nombre inconnu, que l'on représente par une lettre (x, t, a, ..)

Résoudre une équation c'est trouver la valeur de l'inconnue x qui vérifie l'égalité.

Explication:
Les 2 membres d'une égalité sont comme les 2 plateaux d'une balance entre lesquels l'équilibre doit être conservé.



$37 + x = 56$

Tout changement sur l'un des plateaux doit être répercuté sur l'autre plateau.

2 - La règle d'addition

Propriété 1: Une égalité reste vraie lorsqu'on ajoute un même nombre aux deux membres de cette égalité.

$\boxed{\text{Si } a = b \text{ alors } a + c = b + c}$

Application: Transposer un terme d'un côté à l'autre d'une égalité.

Exemples: Si $x + 37 = 56$ alors $x + 37 + (-37) = 56 + (-37)$ d'où $x = 19$

Si $(-2x) + 5 = 3x$ alors $2x + (-2x) + 5 = 2x + 3x$ d'où $5 = 5x$

3 - La règle de multiplication

Propriété 2: Une égalité reste vraie lorsqu'on multiplie par un même nombre les deux membres de cette égalité.

$\boxed{\text{Si } a = b \text{ alors } a \times c = b \times c}$

Application: Trouver la valeur de $1x$.

Exemples: Si $3x = 7$ alors $\left(\frac{1}{3} \times 3\right)x = \frac{1}{3} \times 7$ d'où $1x = \frac{7}{3}$

Si $\frac{-5}{2}x = 4$ alors $\left(\frac{2}{-5} \times \frac{-5}{2}\right)x = \frac{2}{-5} \times 4$ d'où $1x = \frac{-8}{5}$

Application: Simplifier une équation avec fractions.

Exemple: Si $\frac{5}{2} + x = \frac{7}{2}x$ alors $\frac{5}{2} + \frac{2}{2}x = \frac{7}{2}x$ soit $\frac{5+2x}{2} = \frac{7x}{2}$

D'où $2 \times \frac{5+2x}{2} = 2 \times \frac{7x}{2}$ puis on simplifie par 2 pour obtenir $5 + 2x = 7x$

4 - Méthode de résolution d'une équation

Résoudre l'équation: $3x + 2 = -7x + 5$

1) On regroupe les x dans un membre et les nombres dans l'autre membre.

$$7x + 3x + 2 = 7x + (-7x) + 5$$
$$10x + 2 = 5$$
$$10x + 2 + (-2) = 5 + (-2)$$
$$10x = 3$$

2) On cherche la valeur de 1x.

$$(\frac{1}{10} \times 10)\, x = \frac{1}{10} \times 3 \quad \text{d'où} \quad 1x = \frac{3}{10}$$

3) On conclut avec une phrase.

La solution de l'équation est $\frac{3}{10}$

4) Vérification (conseillée mais pas obligatoire).

Membre de gauche: $3 \times \frac{3}{10} + 2 = \frac{9}{10} + \frac{20}{10} = \frac{29}{10}$

Membre de droite: $-7 \times \frac{3}{10} + 5 = \frac{-21}{10} + \frac{50}{10} = \frac{29}{10}$

Donc l'égalité est bien vérifiée.

II- Avec des inégalités

De même que pour les égalités, il y a 2 règles fondamentales qui permettent de manipuler des inégalités.

1 - La règle d'addition

Propriété 3: Une inégalité reste vraie lorsqu'on ajoute un même nombre aux deux membres de cette inégalité.

$\boxed{\text{Si } a < b \text{ alors } a + c < b + c}$

Application: Transposer un terme d'un côté à l'autre d'une inégalité.

Exemple: Si $x + 2 < 3$ alors $x + 2 + (-2) < 3 + (-2)$ d'où $x < 1$

2 - La règle de multiplication

Propriété 4: Une inégalité reste vraie lorsqu'on multiplie par un même nombre strictement positif les deux membres de cette inégalité.

$$\boxed{\text{Si } a < b \text{ et } c > 0 \text{ alors } a \times c < b \times c}$$

Remarque: On peut facilement tester cette propriété sur des exemples numériques.
Mais pourquoi ne peut-on multiplier que par un nombre strictement positif ?
Essayons avec (-1): $2 < 3$

$$2 \times (-1) = (-2) \text{ et } 3 \times (-1) = (-3) \text{ d'où } (-2) > (-3)$$

Sur cet exemple, on constate que la condition $c > 0$ est bien nécessaire.

III- Développer, réduire et factoriser

1 - Développer un produit et réduire (rappel)

Propriété 5: La multiplication est distributive sur l'addition.

$$\boxed{k \times (a + b) = k \times a + k \times b}$$

Exemple: $2 \times (3 + 5) = 2 \times 3 + 2 \times 5$ (cette égalité se vérifie très facilement)

Application: Signe – et parenthèse

$$-(a + b) = (-1) \times (a + b) = (-1) \times a + (-1) \times b = (-a) + (-b) = -a - b$$

$$-(a + b) = -a - b$$

Remarque: On peut supprimer des parenthèses précédées du signe + ;
en effet, $+(a + b) = (+1) \times (a + b) = (+1) \times a + (+1) \times b = a + b$

$$+(a + b) = a + b$$

$$k \times (a - b) = k \times [a + (-b)] = k \times a + k \times (-b) = k \times a - k \times b$$

$$k \times (a - b) = k \times a - k \times b$$

Exemple: Résoudre l'équation $3-5(a+7)=2$

On commence par développer le produit pour retrouver "la forme habituelle".

$$3-5(a+7)=3+(-5)\times(a+7)=3+(-5)\times a+(-5)\times 7=3+(-5a)+(-35)$$

L'équation s'écrit alors $3+(-5a)+(-35)=2$

$$(-5a)+(-32)=2$$

...

Application: Double distributivité

$$(k+m)(a+b)=(k+m)\times(a+b)=(k+m)\times a+(k+m)\times b$$

or, dans une multiplication, on peut permuter les facteurs

donc $(k+m)\times a=a\times(k+m)=a\times k+a\times m=k\times a+m\times a$

de façon analogue, $(k+m)\times b=k\times b+m\times b$

Finalement: $(k+m)(a+b)=k\times a+m\times a+k\times b+m\times b$

$$(k+m)(a+b)=k\times a+m\times a+k\times b+m\times b$$

Réduire une expression c'est regrouper tous les termes de la même "espèce".

Exemple: Développer et réduire l'expression $(3+2a)(5-a)$

$$(3+2a)(5-a)=[3+2a][5+(-a)]=3\times 5+2a\times 5+3\times(-a)+(2a)\times(-a)$$
$$=15+2\times a\times 5+(-3a)+2\times a\times(-1)\times a$$
$$=15+10a+(-3a)+(-2a^2)$$
$$=15+7a-2a^2$$

2 - Factoriser

Factoriser c'est utiliser la distributivité de la multiplication sur l'addition pour transformer une somme en produit.

$$\boxed{k\times a+k\times b=k\times(a+b)}$$

Exemples: $10a+30=10\times a+10\times 3=10\times(a+3)=10(a+3)$

$4t^2-t=4t\times t-1\times t=(4t-1)\times t=(4t-1)t$