

CHAPITRE 08

Puissances et écriture scientifique

I- Définitions et conventions

Définition 1: Pour tout nombre a différent de 0 et tout entier positif ou nul n , on définit le nombre a^n qui se lit "a puissance n" de la façon suivante:

$$\begin{aligned} \text{Si } n = 0 & \text{ alors } a^0 = 1 \\ \text{Si } n = 1 & \text{ alors } a^1 = a \\ \text{Si } n > 1 & \text{ alors } a^n = a \times a \times \dots \times a \text{ (n facteurs } a) \end{aligned}$$

Exemples: $3^1 = 3$; $(-2)^1 = -2$; $0,5^1 = 0,5$

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$$
 ; $(-3)^3 = (-3) \times (-3) \times (-3) = -27$

$$(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = 81$$

$$\left(\frac{5}{3}\right)^4 = \frac{5}{3} \times \frac{5}{3} \times \frac{5}{3} \times \frac{5}{3}$$

$$2^0 = 1$$
 ; $(-3)^0 = 1$; $2,3^0 = 1$; $\left(\frac{4}{7}\right)^0 = 1$

Vocabulaire: Le nombre a^n peut aussi se lire "a exposant n".

a^2 se lit "a au carré"; a^3 se lit "a au cube".

Convention: L'exposant est toujours prioritaire sur les autres opérateurs.

$$-2^5 = -(2^5) = -(2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) = -32$$

$$2 \times 3^2 = 2 \times (3 \times 3) = 2 \times 9 = 18$$

$$2 + 3^2 = 2 + 3 \times 3 = 2 + 9 = 11$$

Définition 2: Pour tout nombre a différent de 0 et tout entier relatif n , on définit le nombre a^{-n} de la façon suivante:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

C'est à dire que a^{-n} est l'inverse de a^n .

Exemples: $5^{-1} = \frac{1}{5}$; $(-4)^{-1} = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}$; $\left(\frac{3}{7}\right)^{-1} = \frac{7}{3}$; $\left(-\frac{5}{4}\right)^{-1} = -\frac{4}{5}$

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2 \times 2 \times 2} = \frac{1}{8}$$

II- Règles de calcul

1 - Le produit

Propriété 1: Quels que soient les nombres a et b différents de 0, si m et n sont deux entiers relatifs alors:

$$\begin{aligned} a^m \times a^n &= a^{m+n} \\ a^n \times b^n &= (a \times b)^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Exemples: } 10^3 \times 10^2 &= 10^{3+2} = 10^5 & 2^3 \times 5^3 &= (2 \times 5)^3 = 10^3 \\ 5^{-3} \times 5^{-5} &= 5^{(-3)+(-5)} = 5^{-8} & 7^{-4} \times 4^{-4} &= (7 \times 4)^{-4} = 28^{-4} \\ 2^3 \times 2^{-2} &= 2^{3+(-2)} = 2^1 = 2 \end{aligned}$$

Cas particulier: $(-a)^n = [(-1) \times a]^n = (-1)^n \times a^n$ donc $(-a)^n = \begin{cases} a^n & \text{si } n \text{ est pair} \\ -a^n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

2 - Le quotient

Propriété 2: Quels que soient les nombres a et b différents de 0, si m et n sont deux entiers relatifs alors:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \text{ et } \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$\begin{aligned} \text{Exemples: } \frac{7^4}{7^2} &= 7^{4-2} = 7^2 ; \quad \frac{4^3}{4^{-1}} = 4^{3-(-1)} = 4^{3+1} = 4^4 ; & \frac{20^3}{10^3} &= \left(\frac{20}{10}\right)^3 = 2^3 = 8 \\ \frac{3^{-5}}{3^{-3}} &= 3^{-5-(-3)} = 3^{-5+3} = 3^{-2} ; \quad \frac{5^{-4}}{5^2} = 5^{-4-2} = 5^{-6} ; \\ \frac{15^{-4}}{5^{-4}} &= \left(\frac{15}{5}\right)^{-4} = 3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81} \end{aligned}$$

3 - Puissance d'une puissance

Propriété 3: Quel que soit le nombre a différent de 0, si m et n sont deux entiers relatifs alors:

$$(a^m)^n = a^{m \times n}$$

$$\begin{aligned} \text{Exemples: } (2^4)^5 &= 2^{4 \times 5} = 2^{20} \\ (3^{-2})^3 &= 3^{-2 \times 3} = 3^{-6} \\ (5^{-1})^{-2} &= 5^{(-2) \times (-1)} = 5^2 \end{aligned}$$

Remarque: Il n'y a pas de formule reliant $a^n + b^n$ et $(a+b)^n$ dans la leçon.

Il faudra donc faire très attention face à de telles situations.

En effet, $2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$ alors que $(2+3)^2 = 5^2 = 25$.

III- Les puissances de dix.

1 - Puissances de dix et écriture décimale

Propriété 4: Pour tout entier positif ou nul n , on a:

$$10^n = 100\dots 0 \text{ (n zéros)}$$

$$10^{-n} = 0,0\dots 01 \text{ (n chiffres après la virgule)}$$

Exemples: $10^2 = 10 \times 10 = 100$

$10^{-1} = 0,1$

$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$

$10^{-2} = 0,01$

$10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10.000$

$10^{-3} = 0,001$

2 - Application à l'écriture scientifique d'un nombre

Définition 3: L'écriture scientifique d'un nombre décimal non nul est son écriture sous la forme $a \times 10^n$, a étant un nombre décimal ayant un seul chiffre non nul avant la virgule (autrement dit; $1 \leq a < 10$ ou $-10 < a \leq -1$) et n étant un entier relatif.

Exemples:

Écriture décimale	Écriture scientifique
3 843	$3,843 \times 10^3$
0,07	7×10^{-2}
-82500	$-8,25 \times 10^4$
0,417	$4,17 \times 10^{-1}$

EXERCICES 08
Puissances et puissances de 10
Exercice 1:

Calculer les expressions suivantes:

$$A = 5^3 - 4^2$$

$$B = 4^3 + 10 \times 3^4 - 18^0$$

$$C = 7 + (2+3)^3 + 5 \times 4^2$$

$$D = 6 + 4^2$$

$$E = (-5+2)^3$$

$$F = 5 \times 3^4$$

$$G = 2^3 \times 5^3$$

$$H = 3 + 5 \times 6^2$$

$$I = 3 \times (5-7)^2 - (4-5^2 - 2^3)$$

$$J = 8^2 \times (7-8)^3 + (4^2 - 3^2)$$

$$K = \left(\frac{7}{3}\right)^2 \times \left(\frac{3}{7}\right)^2 \times \frac{7^2}{3} \times \frac{1}{3}$$

Exercice 2:

1 - Ecrire sous la forme d'une puissance de 2: $L = \frac{2^{-3} \times 2^{-7}}{2^{-5} \times 2^{12}}$

$$M = \frac{(8^3)^2}{8^4}$$

2 - Ecrire sous la forme d'une puissance de 10:

$$N = (10^3)^{-1} \times (10^{-2})^{-3}$$

$$P = 10^5 \times 10^{-2} \times 0,01$$

$$Q = \frac{10^7 \times 10^{-3}}{10^2}$$

$$R = \frac{10^5}{10^8 \times 10^{-2}} =$$

$$S = \left(\frac{10^8}{10}\right)^4$$

$$T = \frac{(10^5)^{-2} \times 10^6}{0,001}$$

3 - Ecrire uniquement à l'aide de puissances de 2 et de 3:

$$U = 6^{-4}$$

$$V = 0,5 \times 3^{-3} \times 9$$

$$W = (3 \times 2)^{-3} \times 12$$

$$X = \frac{(2 \times 3)^2}{2^4 \times 3}$$

Exercice 3:

Donner l'écriture scientifique des nombres suivants:

$$a = 7246,5$$

$$b = 0,00025$$

$$c = 32,3 \times 10^8$$

$$d = 968 \times 10^6$$

$$e = 0,00227$$

$$f = 0,0002 \times 10^{12}$$

Exercice 4:

Compléter le tableau suivant :

Écriture fractionnaire	$\frac{1}{100}$			$\frac{2}{25}$	
Écriture décimale			0,025		
Écriture scientifique		5×10^{-1}			$4,251 \times 10^4$

Exercice 5:

Calculer et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible:

$$x = \frac{10^{-8} \times 0,7 \times 10^{12}}{21 \times 10^3}$$

$$y = \frac{12 \times 10^{-10} \times 5 \times 10^6}{15 \times 10^3 \times 2 \times 10^2}$$

$$z = \frac{13 \times 10^4 \times 4 \times 10^{-8}}{5 \times 10^{-3}}$$