Exercice n° 24 de la liste

Exercice de géométrie *(connu sous le nom de parallélogramme de Varignon)*

On considère un quadrilatère ABCD **quelconque**

et on désigne par les points

- I le milieu du côté [AB]
- J le milieu du côté [BC]
- K le milieu du côté [CD]
- L le milieu du côté [DA]

I) Questions qui permettent de faire une conjecture sur la nature du quadrilatère I J K L

I.1) Tracer sur une feuille de papier **un quadrilatère quelconque** ABCD

I.2) Placer et tracer les points I , J , K et L et tracer le quadrilatère I J K L

II.3) Que remarquez- vous sur la nature du quadrilatère IJKL ?

I.4) **Tracer un autre quadrilatère** ABCD et tracer de nouveau le quadrilatère I J K L
Que remarquez-vous ?
Conjecturer une propriété sur la nature du quadrilatère IJKL

I.5) **(faculatif pour les élèves qui ne savent pas utiliser le logiciel de géométrie : « Géogébra »)**
Utiliser le logiciel internet « **Géogébra »** pour faire les 2 dessins demandés dans cette partie

II) Questions qui permettent de démontrer la conjecture (partie I) sur la nature du quadrilatère IJKL

II.1) Sur un des 2 dessins précédents, tracer la droite (AC) et la droite (I J)

II.2) Démontrer que les droites (AC) et (I J) sont parallèles

II.3) Tracer la droite (KL)
et avec le même type de raisonnement démontrer que les droites (AC) et (KL) sont parallèles

II.4) Déduire des questions **II.2)** et **II.3)** que les droites (I J) et (KL) sont parallèles

II.5) Démontrer que les 2 distances I J = KL (distances entre les points I et J et les point K et L)

II.6) Citer la propriété qui permet de conclure que le quadrilatère IJKL est un parallélogramme

Correction

Figures tracées avec le logiciel **Géogébra** **(Réponses aux questions de la partie I de l' exercice)**

Figure n° 1

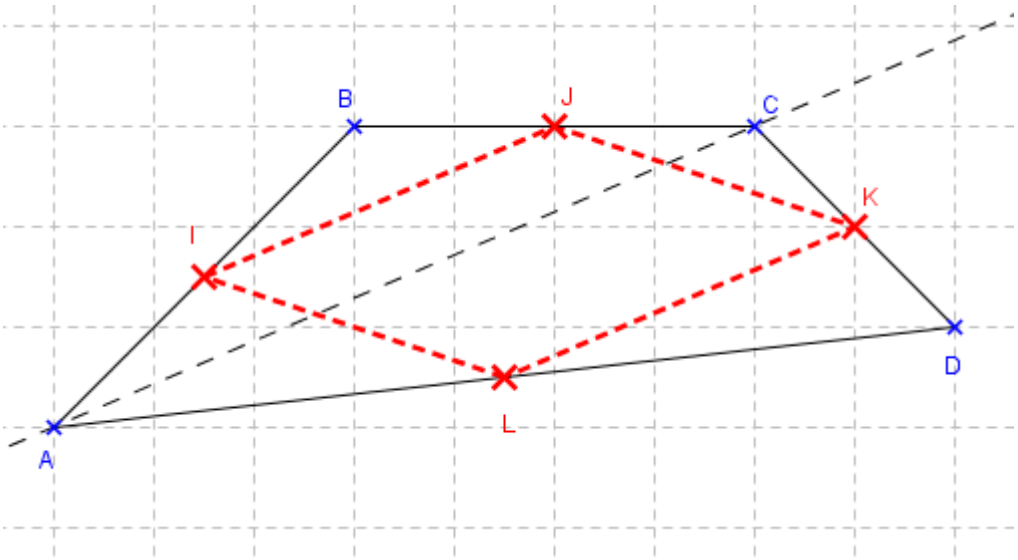
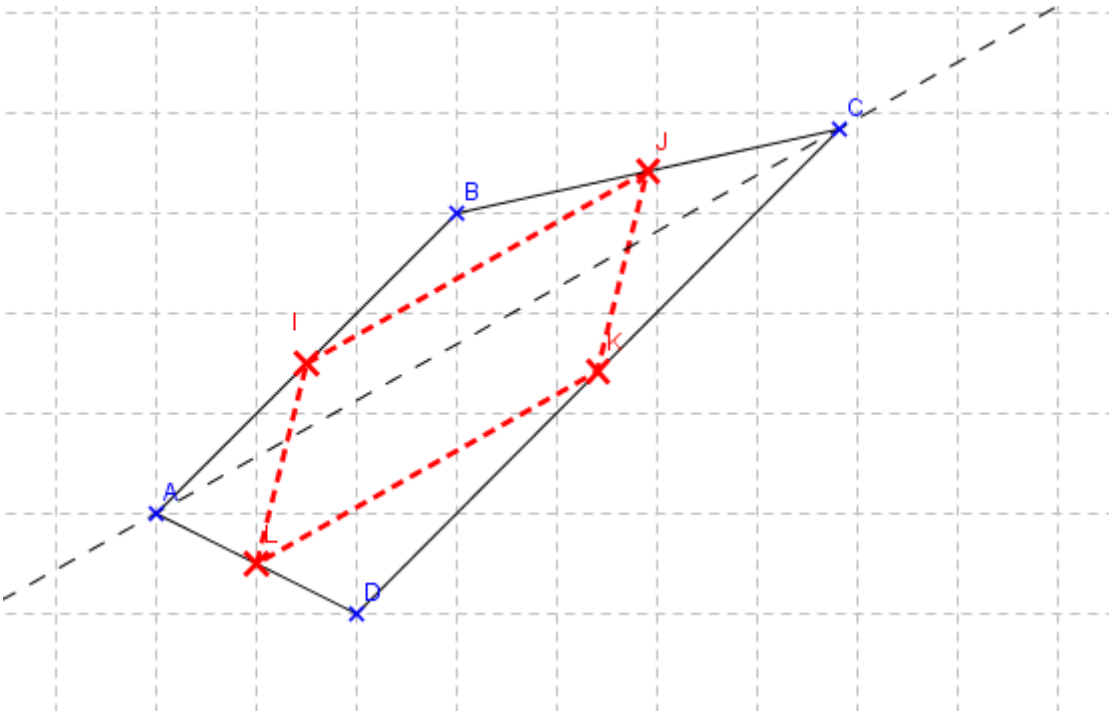


Figure n° 2



Compte de ces 2 dessins faits avec le logiciel **Géogébra**

on peut conjecturer que le quadrilatère IJKL est un parallélogramme

Réponse à la question II.2)

On reconnait une configuration qui permet d'appliquer **la réciproque du théorème de Thalès** dans le triangle ABC *(« triangle vu à partir du sommet B »)*

Comme le point I est le milieu du segment $[AB]$ on a $BA = 2 \times BI$ donc $\frac{BA}{BI} = 2$

Comme le point J est le milieu du segment $[BC]$ on a $BC = 2 \times BJ$ donc $\frac{BC}{BJ} = 2$

Comme $\frac{BA}{BI} = \frac{BC}{BJ}$

et comme les point B , I , A et les points B , J , C sont alignés dans le même ordre
d'après la réciproque du théorème de Thalès : on peut conclure que $(IJ) \ // \ (AC)$

Réponse à la question II.3)

Avec le même raisonnement dans le triangle ACD *(« triangle vu à partir du sommet D »)*
on peut démontrer que $(KL) \ // \ (AC)$

Réponse à la question II.4)

Comme $(IJ) \ // \ (AC)$ et $(KL) \ // \ (AC)$
d'après un théorème du cours on en déduit que $(IJ) \ // \ (KL)$

Réponse à la question II.5)

D'après le théorème de Thalès dans le triangle ABC *(« triangle vu à partir du sommet B »)*

Comme $(IJ) \ // \ (AC)$ on a $\frac{BA}{BI} = \frac{BC}{BJ} = \frac{AC}{IJ} = 2$

D'après le théorème de Thalès dans le triangle ACD *(« triangle vu à partir du sommet D »)*

Comme $(KL) \ // \ (AC)$ on a $\frac{DA}{DK} = \frac{DC}{DL} = \frac{AC}{KL} = 2$

On a donc $\frac{AC}{IJ} = \frac{AC}{KL}$ et d'après cette égalité on en déduit que $IJ = KL$

Réponse à la question II.6)

Le quadrilatère $IJKL$ ayant 2 côtés opposés de même longueur $IJ = KL$ et parallèles $(IJ) \ // \ (KL)$
d'après une propriété caractéristique du parallélogramme

on peut conclure que le quadrilatère $IJKL$ est un parallélogramme

Pour information :

Le parallélogramme $IJKL$ est appelé **« *PARALLELOGRAMME DE VARIGNON* »** du quadrilatère $ABCD$