Racines carrées

Définition :

a étant **un nombre positif ou nul** ($a \in \mathbb{R}_+$),

$\sqrt{a}$ est le nombre positif (ou nul) qui élevé au carré donne a. $\boxed{\sqrt{a} \times \sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 = a}$

Règles :

$\forall a \in \mathbb{R}_+$ et $\forall b \in \mathbb{R}_+$ $\boxed{\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}}$ et donc $\boxed{\sqrt{a^2 b} = \sqrt{a^2} \times \sqrt{b} = a\sqrt{b}}$ $\boxed{\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}, \text{ avec } b \neq 0}$

$\boxed{\sqrt{1} + \sqrt{1} = 1 + 1 = 2 \text{ mais } \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \text{ donc } \sqrt{1+1} \neq \sqrt{1} + \sqrt{1}}$

Application : Pour supprimer les radicaux au dénominateur :

- $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \dfrac{(2+\sqrt{3}) \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2} + \sqrt{3} \times \sqrt{2}}{2} = \dfrac{2\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$
- Quantité conjuguée : $\dfrac{2+\sqrt{5}}{2-\sqrt{3}} = \dfrac{(2+\sqrt{5}) \times (2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3}) \times (2+\sqrt{3})} = \dfrac{4 + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{5} + \sqrt{5}\sqrt{3}}{2^2 - (\sqrt{3})^2} = \dfrac{4 + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{5} + \sqrt{15}}{1}$

Puissances

Définition :

a étant **un nombre non nul** ($a \in \mathbb{R}^*$) et n un entier non nul ($n \in \mathbb{N}^*$)

La puissance n de a est le produit : $\boxed{a^n = a \times a \times a \times a \times \ldots \times a \text{ (avec n facteurs)}}$

n est l'exposant.

Règles :

Par convention $a^0 = 1$; $a^1 = a$; $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$ et $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

- Pour n et p entiers relatifs : $\boxed{a^n \times a^p = a^{n+p}}$; $\boxed{(a^n)^p = a^{np}}$ $\boxed{\dfrac{a^n}{a^p} = a^{n-p}}$
- Pour a et b des nombres non nuls et n entier relatif : $\boxed{(a \times b)^n = a^n \times b^n}$ $\boxed{\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}}$

Remarques

- Puissances de 10 : $10^{-5} = \dfrac{1}{10^5} = \dfrac{1}{100\,000} = 0{,}000\,01$
  (5 zéros)
- Notation scientifique : $\boxed{\textit{nombre entre 1 et 10 exclu}} \times 10^n$

Exemples : $0{,}123 = 1{,}23 \times 10^{-1}$; $12\,053 = 1{,}2053 \times 10^4$; $0{,}00012 = 1{,}2 \times 10^{-4}$

Attention, ne pas confondre :

$(-2)^4$ **et** -2^4 : $(-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = 16$ *et* $-2^4 = -2 \times 2 \times 2 \times 2 = -16$

de même, $(-x)^2 \neq -x^2$ *(sauf pour x=0)*

exemples :

$A = 3^{n+1} = 3^n \times 3^1 = 3 \times 3^n$

$B = \dfrac{10^n \times 7^2}{5^n \times 7^5 \times 2^n} = \dfrac{(2 \times 5)^n \times 7^2}{5^n \times 2^n \times 7^5} = \dfrac{2^n \times 5^n \times 7^2}{2^n \times 5^n \times 7^5} = \dfrac{1}{7^3}$ ou 7^{-3}

$C = 5^{2n-2} = 5^{2n} \times 5^{-2} = \dfrac{5^{2n}}{5^2}$

Application : Résoudre une équation du type « $x^2 = a$ »

Propriété :

Soit a est un nombre **positif**
L'équation $x^2 = a$ admet les **deux solutions** $-\sqrt{a}$ ou $\sqrt{a}$

Démonstration :
Soit le nombre $a > 0$

On cherche à résoudre l'équation : $x^2 = a$

Comme $a = \left(\sqrt{a}\right)^2$ on peut écrire $x^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2$ c'est-à-dire $x^2 - \left(\sqrt{a}\right)^2 = 0$

D'après une identité remarquable on obtient l'équation $\left(x+\sqrt{a}\right)\left(x-\sqrt{a}\right) = 0$

Cela signifie que :
$x+\sqrt{a} = 0$ ou $x-\sqrt{a} = 0$

C'est-à-dire $x = -\sqrt{a}$ ou $x = \sqrt{a}$

On conclut que les solutions de cette équation sont $-\sqrt{a}$ ou $\sqrt{a}$

1ier exemple
Résoudre l'équation $x^2 = 16$:

L'équation $x^2 = 16$ peut s'écrire $x^2 = \left(\sqrt{16}\right)^2$ c'est-à-dire $x^2 - \left(\sqrt{16}\right)^2 = 0$

On a donc $\left(x+\sqrt{16}\right)\left(x-\sqrt{16}\right) = 0$

Cela signifie que :
$x = -\sqrt{16}$ ou $x = \sqrt{16}$
c'est-à-dire $x = -4$ ou $x = 4$
Cette équation admet deux solutions -4 et 4

Remarques

- L'équation « $x^2 = 0$ » n'admet qu'une seule solution car $\sqrt{0} = -\sqrt{0} = 0$.
- Si a est négatif, l'équation « $x^2 = a$ » n'a pas de solution puisqu'un carré est toujours positif.

2ième exemple
Résoudre l'équation $(x-1)^2 = 5$

$(x-1)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2$

$(x-1)^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2 = 0$

$(x-1+\sqrt{5})(x-1-\sqrt{5}) = 0$
Cela signifie que :
$x-1+\sqrt{5} = 0$ ou $x-1-\sqrt{5} = 0$

c'est-à-dire $x = 1-\sqrt{5}$ ou $x = 1+\sqrt{5}$

Cette équation admet deux solutions $1-\sqrt{5}$ et $1+\sqrt{5}$