

Exemple d'exercices avec la loi normale (source document d'accompagnement)

A propos des calculatrices

Pour entrer les paramètres, il faut saisir les valeurs de μ et de σ (et non σ^2)

Les calculatrices ne fournissent pas $P(X \leq a)$ mais seulement $P(a \leq X \leq b)$.

Pour le calcul de $P(X \leq x)$ dans le cas où X suit une loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$:

- On peut utiliser la propriété suivante :

- Si $x \geq \mu$, on utilise $P(X \leq x) = 0,5 + P(\mu \leq X \leq x)$
- Si $x \leq \mu$, on utilise $P(X \leq x) = 0,5 - P(x \leq X \leq \mu)$.

- On peut aussi « ruser » en considérant que :

$$P(X \leq x) \text{ est très proche de } P(-10^{99} \leq X \leq x)$$

$$P(X \geq x) \text{ est très proche de } P(x \leq X \leq 10^{99})$$

Exercice 1 : La sélection chez les vaches laitières de race « Française Frisonne Pis Noir »

La production laitière annuelle en litres des vaches laitières de la race FFPN peut être modélisée par une variable aléatoire à densité X , de loi normale de moyenne $\mu = 6000$ et d'écart-type $\sigma = 400$. La fonction g désigne la fonction de densité de cette loi normale.

1° Afin de gérer au plus près son quota laitier (production maximale autorisée), en déterminant la taille optimale de son troupeau, un éleveur faisant naître des vaches de cette race souhaite disposer de certaines probabilités.

a- Calculer la probabilité qu'une vache quelconque de cette race produise moins de 5800 litres par an.

b- Calculer la probabilité qu'une vache quelconque de cette race produise entre 5900 et 6100 litres de lait par an.

c- Calculer la probabilité qu'une vache quelconque de cette race produise plus de 6250 litres par an.

2° Dans son futur troupeau, l'éleveur souhaite connaître :

a) la production maximale prévisible des 30% de vaches les moins productives du troupeau.

b) la production minimale prévisible des 20% des vaches les plus productives.

Exercice 2 : Durée de vie d'un appareil

La durée de vie d'un certain type d'appareil est modélisée par une variable aléatoire suivant une loi normale de moyenne et d'écart-type inconnus. Les spécifications impliquent que 80 % de la production des appareils ait une durée de vie entre 120 et 200 jours et que 5% de la production ait une durée de vie inférieure à 120 jours.

1. Quelles sont les valeurs de μ et σ^2 ?
2. Quelle est la probabilité d'avoir un appareil dont la durée de vie soit comprise entre 200 jours et 230 jours ?

Solution exercice 1

1. a- En utilisant calculatrices ou logiciels, on trouve : $P(X \leq 5800) \approx 0,3085$.
b- $P(5900 \leq X \leq 6100) \approx 0,1974$.
c- $P(X \geq 6250) \approx 0,2660$.

2. On utilise la fonction « inverse » de la calculatrice qui donne x quand on entre $P(X \leq x)$
 - a- Il s'agit de déterminer la valeur x de X telle que $P(X \leq x) = 0,30$.
 $x \approx 5790$ litres de lait par an.

 - b- Il s'agit de déterminer la valeur x de X telle que $P(X \geq x) = 0,20$ soit $P(X \leq x) = 0,8$.
 $x \approx 6336$ litres de lait par an.

Solution exercice 2

1. On note X la variable « durée de vie ». Les spécifications se traduisent par :

$$P(120 \leq X \leq 200) = 0,8 \text{ et } P(X \leq 120) = 0,05 \text{ d'où } P(X \leq 200) = 0,85$$

En posant $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ Z suit $\mathcal{N}(0,1)$, on obtient donc:

$$P\left(\frac{120 - \mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{200 - \mu}{\sigma}\right) = 0,8 \text{ et } P\left(Z \leq \frac{120 - \mu}{\sigma}\right) = 0,05$$

Avec la calculatrice, $P\left(Z \leq \frac{120 - \mu}{\sigma}\right) = 0,05$ donne $\frac{120 - \mu}{\sigma} = -1,65$

et $P\left(Z \leq \frac{200 - \mu}{\sigma}\right) = 0,85$ donne $\frac{200 - \mu}{\sigma} = 1,04$

Ce qui donne le système suivant :
$$\begin{cases} \mu = 120 + 1,65 \sigma \\ \mu = 200 - 1,04 \sigma \end{cases}$$

La résolution du système donne : $\mu \approx 169$ et $\sigma^2 \approx 884$.

2. $P(200 \leq X \leq 230) = P(X \leq 230) - P(X \leq 200) \approx 0,13$