

La fonction « **exponentielle à base e** » et sa fonction réciproque « **Logarithme népérien** »

I) Etude de la fonction « exponentielle » (à base $e \approx 2,7$)

c.à.d. la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R} \quad x \rightarrow e^x$

Soit f cette fonction c'est-à-dire soit f la fonction définie par l'expression $f(x) = e^x$ avec $x \in \mathbb{R}$

Comme $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = e^x > 0$ cette fonction donne des résultats qui sont TOUS strictement positifs

(c'est-à-dire qui sont TOUS dans $\mathbb{R}^{+*} =]0, +\infty[$)

On peut démontrer que cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$

Calcul de la fonction dérivée f' : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = f(x) = e^x > 0$ (Formule à connaître par cœur)

CONCLUSION n° 1 :

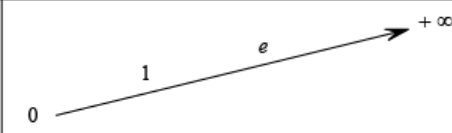
La fonction exponentielle définie par $f(x) = e^x$ est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$

$$\text{De plus comme } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \text{et} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \end{cases}$$

CONCLUSION n° 2 :

La fonction exponentielle définie par $f(x) = e^x$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$

Et on a **le tableau de variation**

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$\exp(x)$				

CONCLUSION n° 3 :

On peut définir la fonction réciproque de la fonction $f(x) = e^x$ c'est-à-dire une fonction g définie par

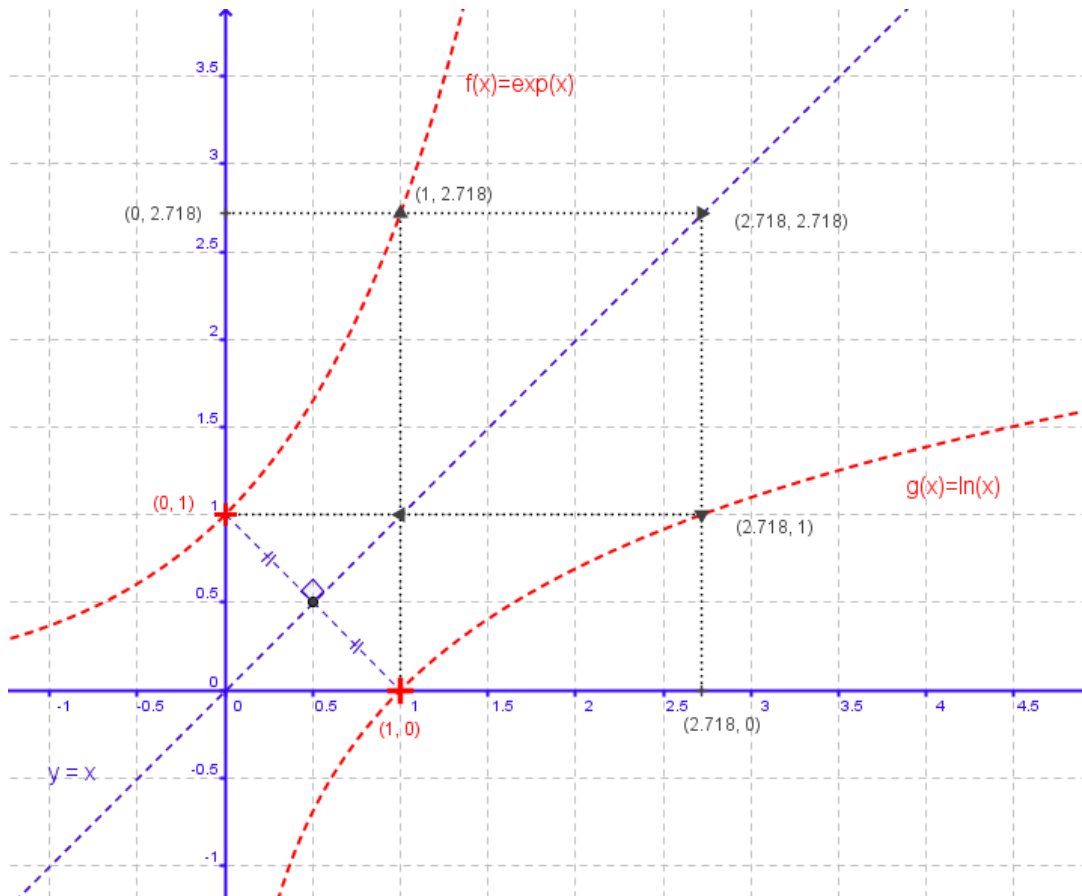
$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \quad g(x) = \ln(x)$ (fonction de $\mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$) et qui vérifie

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} & g \circ f(x) = g[f(x)] = g(e^x) = \ln(e^x) = x \\ & \text{et} \\ \forall x \in \mathbb{R}^{+*} & f \circ g(x) = f[g(x)] = f(\ln(x)) = e^{\ln(x)} = x \end{cases}$$

II) Représentation graphique des fonctions « exponentielle à base e » et « logarithme népérien »

Soit la fonction $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^{+*}$ telle que $f(x) = \exp(x) = e^x$

Soit la fonction $g: \mathbb{R}^{+*} \mapsto \mathbb{R}$ telle que $g(x) = \ln(x)$



Conclusion	$\forall x \in \mathbb{R} \quad \ln \circ \exp(x) = x$	c'est-à-dire	$\forall x \in \mathbb{R} \quad \ln(e^x) = x$
	$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \quad \exp \circ \ln(x) = x$	c'est-à-dire	$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \quad e^{\ln(x)} = x$

Remarque Les représentations graphiques **dans un repère orthonormal**

des fonctions $f(x) = e^x$ et $g(x) = \ln(x)$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ c'est-à-dire à la bissectrice de l'angle (Ox, Oy)

III) Etude de la fonction « Logarithme népérien »

c.à.d. la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \quad x \rightarrow \ln(x)$

Soit f cette fonction c'est-à-dire soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(x)$ avec $x \in \mathbb{R}^{+*}$

On peut démontrer que cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$

Calcul de la fonction dérivée f' : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \quad f'(x) = \frac{1}{x}$ (Formule à connaître par cœur)

CONCLUSION n° 1 :

Comme $\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \quad f'(x) = \frac{1}{x} > 0$

La fonction exponentielle définie par $f(x) = \ln(x)$ est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$

De plus on a
$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty \\ \text{et} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \end{array} \right.$$

CONCLUSION n° 2 :

La fonction logarithme népérien définie par $f(x) = e^x$ est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$

Et on a **le tableau de variation**

x	0	1	e	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	0	1	$+\infty$

IV) PROPRIETES IMPORTANTES A COMPRENDRE**1) Fonctions bijectives et réciproques**

$$\forall a \in \mathbb{R} \text{ et } \forall b \in \mathbb{R} \quad e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$$

$$\forall a \in \mathbb{R}^{+*} \text{ et } \forall b \in \mathbb{R}^{+*} \quad \ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$$

On a
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y > 0 \quad y = e^x \Leftrightarrow \ln(y) = \ln(e^x) \Leftrightarrow \ln(y) = x$$

et
$$\forall x > 0 \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad y = \ln(x) \Leftrightarrow e^y = e^{\ln(x)} \Leftrightarrow e^y = x$$

2) Fonctions strictement croissantes

$$\forall a \in \mathbb{R} \text{ et } \forall b \in \mathbb{R} \quad a < b \Rightarrow e^a < e^b$$

$$\forall a \in \mathbb{R}^{+*} \text{ et } \forall b \in \mathbb{R}^{+*} \quad a < b \Rightarrow \ln(a) < \ln(b)$$

3) Propriétés de la fonction exponentielle à base e : c.à.d. la fonction définie par $x \rightarrow e^x$ avec $x \in \mathbb{R}$

(mêmes propriétés que les propriétés des fonctions puissances)

Si a et b sont 2 réels et si $n \in \mathbb{Z}$:

$$\circ e^{a+b} = e^a \times e^b$$

$$\circ e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$$

$$\circ (e^a)^n = e^{na}$$

4) Propriétés fonction logarithme népérien: c.à.d. la fonction définie par $x \rightarrow \ln(x)$ avec $x \in \mathbb{R}^{+*}$

Si a et b sont 2 réels strictement positifs et si $n \in \mathbb{Z}$:

$$\circ \ln(ab) = \ln a + \ln b$$

$$\circ \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

$$\circ \ln(a^n) = n \ln a$$

$$\circ \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$$