*La fonction « **racine carrée** » définie par* $\forall x \geq 0 \quad x \to \sqrt{x}$

I) QUELQUES COMMENTAIRES sur la fonction « *carré* »

c.à.d. la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R} \quad x \to x^2$

Soit f cette fonction c'est-à-dire soit f la fonction définie par l'expression $f(x) = x^2$ avec $x \in \mathbb{R}$

Comme $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x^2 \geq 0$ cette fonction donne des résultats qui TOUS positifs (dans $\mathbb{R}^+$)

Calculons les antécédents d'un nombre positif quelconque par **la fonction « *carré* »**

c'est-à-dire recherchons les valeurs de la variable x telles que $f(x) = a \Leftrightarrow x^2 = a$

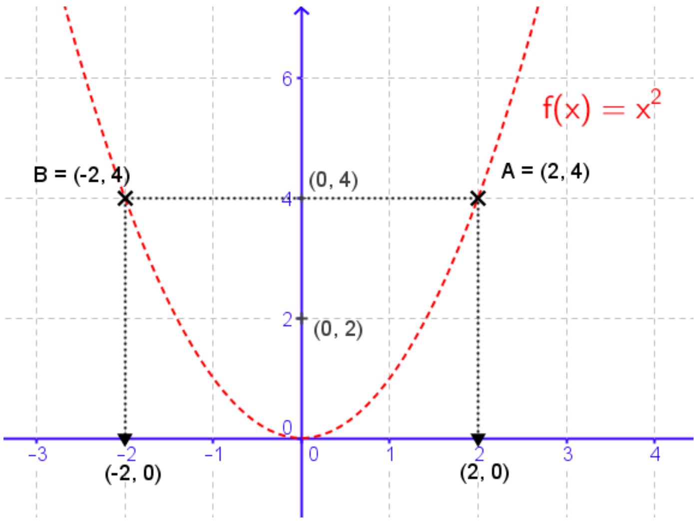
Cela revient à résoudre l'équation $x^2 - a = 0$ *(avec* $a \in \mathbb{R}^+$ *un nombre positif donné)*

$$x^2 = a \Leftrightarrow x^2 - a = 0 \Leftrightarrow x^2 - \left(\sqrt{a}\right)^2 \Leftrightarrow \left(x + \sqrt{a}\right)\left(x - \sqrt{a}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{a} \\ \text{ou} \\ x = -\sqrt{a} \end{cases}$$

<u>CONCLUSION</u> : **La fonction « *carré* »** est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et dont l'ensemble d'arrivée est $\mathbb{R}^+$ et tout nombre strictement positif $a > 0$ a **2 antécédents** qui sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$

On ne peut pas définir une fonction réciproque

(**la fonction « *carré* »** n'est pas une bijection de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$)



Exemple : $x^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2 \\ \text{ou} \\ x = -\sqrt{4} = -\sqrt{2^2} = -2 \end{cases}$

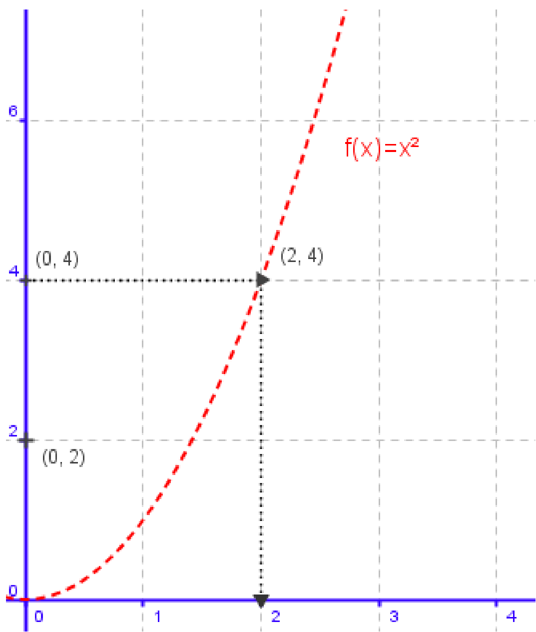
Par **la fonction « *carré* »** le nombre 4 à deux antécédents qui sont 2 et -2

<u>Notion de fonction réciproque d'une fonction f *qui est* bijective de I sur J</u>

Si f est une fonction bijective de I sur J , on peut définir une fonction g de J sur I telle que $\forall x \in I \quad \forall y \in J \quad y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$

Cette fonction g est appelée la fonction réciproque de la fonction f

et en maths on écrit que $g = f^{-1}$



<u>Exemple</u> : **La restriction de la fonction « *carré* » sur** $\mathbb{R}^+$

Cette restriction est une fonction bijective de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$

ET DONC ON PEUT DEFINIR LA FONCTION RECIPROQUE A CETTE RESTRICTION

ET CETTE FONCTION RECIPROQUE est **la fonction « *racine carrée* »** définie par $\forall x \geq 0 \quad x \to \sqrt{x}$

II) QUELQUES COMMENTAIRES sur la fonction « *racine carrée* »

La fonction définie par $\forall x \geq 0 \quad x \to \sqrt{x}$ est appelée : **fonction « racine carrée »** $\left(D_f = \mathbb{R}^+ \right)$

C'est la fonction réciproque de la *restriction de la fonction « carré »* sur $\mathbb{R}^+$

On a la propriété suivante : $\boxed{\forall x \geq 0 \quad \forall y \geq 0 \quad y = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{y}}$

Notons la fonction **« racine carrée »** par l'expression $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad g(x) = \sqrt{x}$

ET notons la fonction **restriction de la fonction « carré »** par $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad f(x) = x^2$

On a $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad g \circ f(x) = g[f(x)] = g\left(x^2\right) = \sqrt{x^2} = x$

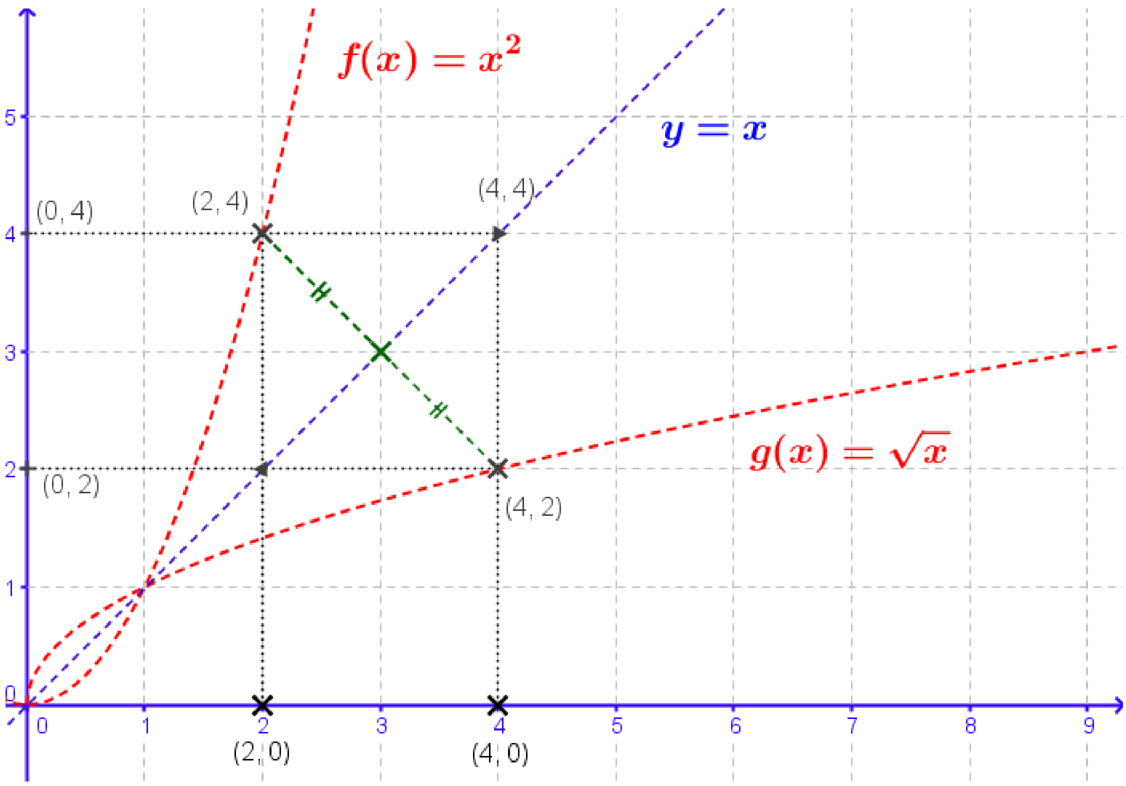
ET on a également $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad f \circ g(x) = f[g(x)] = f\left(\sqrt{x}\right) = \left(\sqrt{x}\right)^2 = x$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad f \circ g(x) = g \circ f(x) = x$ c'est-à-dire $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \left(\sqrt{x}\right)^2 = \sqrt{x^2} = x}$

Représentation graphique

Soit f **la restriction de la fonction « carré »** sur $\mathbb{R}^+$ définie par $\forall x \geq 0 \quad x \to x^2$

et soit g **la fonction « racine carrée »** définie par $\forall x \geq 0 \quad x \to \sqrt{x}$



Propriété : Les représentations graphiques **dans un repère orthonormé** des fonctions f et g sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ (c'est-à-dire à la bissectrice de l'angle (Ox, Oy))

car on a $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad f \circ g(x) = g \circ f(x) = x$ c.à.d. $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad f[g(x)] = g[f(x)] = x$

III) ETUDE de la fonction « *racine carrée* »

Soit f la fonction définie sur $[\ 0\ ,+\infty\ [$ par $f(x)=\sqrt{x}$

Cela veut dire que le domaine de définition de cette fonction est $D_f=[\ 0\ ,+\infty\ [\ \Leftrightarrow\ D_f=\mathbb{R}^+$

En utilisant les règles sur les puissances on peut écrire que $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$

CAR ON A $\forall x\in\mathbb{R}^+\quad\left(\sqrt{x}\right)^2=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2=x^{\frac{1}{2}\times 2}=x^1=x$

Calcul de la fonction dérivée f' *c.à.d.* $\forall x\in\mathbb{R}^{+*}\quad f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ *(Formule à connaitre par cœur)*

Remarque :
On peut démontrer que la fonction $f(x)=\sqrt{x}$ est dérivable **sauf** en $x=0$

Comment retrouver la formule qui donne f **ô** si on l'a oublié ? :

on écrit que $f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ et en appliquant la formule si $f(x)=x^n$ alors $f'(x)=nx^{n-1}$

on obtient $f'(x)=\dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Comme $\forall x\in\mathbb{R}^{+*}\quad\sqrt{x}>0$ on a donc $\forall x\in\mathbb{R}^{+*}\ f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}>0$

et donc la fonction f est strictement croissante sur $[\ 0\ ,+\infty\ [$

Et on a **le tableau de variation**

x	0	$+\infty$
$f(x)=\sqrt{x}$	0	$\nearrow$ $+\infty$

Propriété 1 : (la fonction **« *racine carrée* »** est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$)
$\forall a\in\mathbb{R}^+$ et $\forall b\in\mathbb{R}^+\quad a<b\ \Rightarrow\ \sqrt{a}<\sqrt{b}$

Propriété 2 : (d'après la position des courbes des fonctions **« carré »** et **« *racine carrée* »**)
- soit en utilisant une calculatrice graphique
- soit en regardant le dessin en bas de la page 2 de ce document

On a $\quad\forall x\in[\ 0\ ,\ 1\ ]\qquad x^2\leq x\leq\sqrt{x}$

Et $\quad\forall\ x\in[\ 1\ ,\ +\infty\ [\qquad\sqrt{x}\leq x\leq x^2$

Remarque :
On peut démontrer « *facilement* » ces « inégalités » par des études de signe de chaque expression

Par exemple : Pour trouver toutes les valeurs de x telles que $x^2\leq x$

on fait un tableau de signe de $x^2-x=x\left(x-1\right)$ et on montre que $x\left(x-1\right)\leq 0$ si et seulement si $x\in[\ 0\ ,1\ ]$