**FICHE : Chapitre DERIVATION d'une fonction**

## I) Taux de variation d'une fonction $f$ entre 2 nombres $a$ et $b$

Le taux de variation d'une fonction $f$ entre $a$ et $b=a+h$ est le nombre $T$ tel que

$T = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ avec $h \neq 0$ ( Remarque : si $h < 0$ alors $a+h < a$ )

Interprétation graphique de ce nombre $T$ : *c'est la pente de la droite (AB) qui est appelée une sécante à la courbe $C_f$ avec le point A de coordonnées : ( a ; f(a) ) et B :( b ; f(b) ) ou ( a+h ; f(a+h) )*

## II) Nombre dérivé d'une fonction $f$ en $a$

$$SI \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad existe \, (\in \mathbb{R}) \quad ALORS \text{ on } POSE \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$$

ET on dit que la fonction $f$ est dérivable en $a$

*Et si pour tout nombre **a** appartenant à un intervalle **I** la fonction **f** est dérivable en **a** on dit que la fonction **f** est dérivable sur l'intervalle **I** et on définit sur cet intervalle **I** une nouvelle fonction qui s'appelle « fonction dérivée de f » et qui est notée **f'***

## III) Equation de la tangente à une courbe en un point

si $f$ est dérivable en $a$ : L'équation de la tangente à la courbe $C_f$ au point d'abscisse $a$ est :

$y = f'(a)(x-a) + f(a)$ *( la tangente est la limite des sécantes (AB) à la courbe quand B tend vers A )*

## IV) Fonctions dérivées des fonctions usuelles

$D_f$ est le domaine de définition de la fonction $f$ et

$D_{f'}$ est le domaine de dérivabilité de la fonction $f$

| fonction $f$ définie par | $D_f$ | fonction dérivée $f'$ définie par | $D_{f'}$ |
|---|---|---|---|
| $f(x) = k$ (avec $k \in \mathbb{R}$ ) | $\mathbb{R}$ | $f'(x) = 0$ | $\mathbb{R}$ |
| $f(x) = mx + p$ (avec $m \neq 0$ ) | $\mathbb{R}$ | $f'(x) = m$ | $\mathbb{R}$ |
| $f(x) = x^2$ | $\mathbb{R}$ | $f'(x) = 2x$ | $\mathbb{R}$ |
| $f(x) = x^3$ | $\mathbb{R}$ | $f'(x) = 3x^2$ | $\mathbb{R}$ |
| $f(x) = x^n$ (avec $n \in \mathrm{N}$ ) | $\mathbb{R}$ | $f'(x) = nx^{n-1}$ | $\mathbb{R}$ |
| $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ | $\mathbb{R}^*$ | $f'(x) = (-1)x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$ | $\mathbb{R}^*$ |
| $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$ | $\mathbb{R}^*$ | $f'(x) = (-2)x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$ | $\mathbb{R}^*$ |
| $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ | $\mathbb{R}^+$ | $f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $\mathbb{R}^{+*}$ |
| $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{\frac{-1}{2}}$ | $\mathbb{R}^{+*}$ | $f'(x) = \frac{-1}{2}x^{\frac{-1}{2}-1} = \frac{-x^{\frac{-3}{2}}}{2} = \frac{-1}{2x^{\frac{3}{2}}}$ | $\mathbb{R}^{+*}$ |
| $f(x) = x^q$ (avec $q \in \mathbb{Q}$ ) | $\mathbb{R}^{+*}$ | $f'(x) = qx^{q-1}$ | $\mathbb{R}^{+*}$ |

## V) Opérations sur les fonctions dérivables

Soit $u$ et $v$ **2 fonctions dérivables** en $x_0 \in \mathbb{R}$ **alors** **la fonction** $u+v$ est dérivable en $x_0$

ET les fonctions $ku$ et $u \times v$ sont dérivables en $x_0$ . ET la fonction $\frac{1}{u}$ est dérivable en $x_0$ si $u(x_0) \neq 0$

| Valeur de la fonction $f$ en $x_0$ | Valeur de la fonction dérivée de $f$ en $x_0$ | Opération |
|---|---|---|
| $f(x_0) = ku(x_0)$ (avec $k \in \mathbb{R}$ ) | $f'(x_0) = ku'(x_0)$ | $(ku)' = ku'$ |
| $f(x_0) = (u+v)(x_0) = u(x_0) + v(x_0)$ | $f'(x_0) = u'(x_0) + v'(x_0)$ | $(u+v)' = u' + v'$ |
| $f(x_0) = (u \times v)(x_0) = u(x_0) \times v(x_0)$ | $f'(x_0) = u'(x_0)v(x_0) + u(x_0)v'(x_0)$ | $(uv)' = u'v + uv'$ |
| $f(x_0) = \left(\frac{u}{v}\right)(x_0) = \frac{u(x_0)}{v(x_0)}$ avec $v(x_0) \neq 0$ | $f'(x_0) = \frac{u'(x_0)v(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{v^2(x_0)}$ | $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ |
| $f(x_0) = \frac{1}{u(x_0)}$ avec $u(x_0) \neq 0$ | $f'(x_0) = \frac{-u'(x_0)}{u^2(x_0)}$ | $\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$ |

## VI) Dérivation d'une fonction « composée » de 2 fonctions

Soit $u$ une fonction dérivable en $x_0 \in D_u$ et $f$ une fonction dérivable en $u(x_0) \in D_f$
alors la fonction « composée » définie par $g = f \circ u$ est dérivable en $x_0$

Soit les 2 fonctions $u \ : x \mapsto u(x)$ et $f \ : x \mapsto f(x)$

la fonction composée $g = f \circ u$ est la fonction définie par $: x \xrightarrow{u} u(x) \xrightarrow{f} f[u(x)]$

On note : $g = f \circ u \quad \Leftrightarrow \quad g(x) = (f \circ u)(x) = f[u(x)]$

On a la formule $g'(x) = (f \circ u)'(x) = (f[u(x)])' = f'[u(x)] \times u'(x)$

| fonctions $f$ ou $g$ définies par | $D_f$ ou $D_g$ | fonctions dérivées $f'$ ou $g'$ définies par | $D_{f'}$ ou $D_{g'}$ |
|---|---|---|---|
| $f(x) = x^2$ | $\mathbb{R}$ | $f'(x) = 2x$ | $\mathbb{R}$ |
| $g(x) = [u(x)]^2$ | $D_u$ | $g'(x) = 2 \times u(x) \times u'(x)$ | $D_u$ |
| $f(x) = x^n$ (avec $n \in \mathbb{N}$ ) | $\mathbb{R}$ | $f'(x) = nx^{n-1}$ | $\mathbb{R}$ |
| $g(x) = (u(x))^n$ | $D_u$ | $g'(x) = n(u(x))^{n-1} \times u'(x)$ | $D_u$ |
| $g(x) = u^q(x)$ avec $q \in \mathbb{Q}$ | $D_u$ et ??? | $g'(x) = q(u(x))^{q-1} \times u'(x)$ | $D_u$ et ??? |
| $g(x) = u^3(x)$ | $D_u$ | $g'(x) = 3 \times u^{3-1}(x) \times u'(x) = 3 \times u^2(x) \times u'(x)$ | $D_u$ |
| $g(x) = \frac{1}{u(x)} = u^{-1}(x)$ | $D_u$ et $u(x) \neq 0$ | $g'(x) = (-1) \times u^{-1-1}(x) \times u'(x) = \frac{-u'(x)}{u^2(x)}$ | $D_u$ et $u(x) \neq 0$ |
| $g(x) = \sqrt{u(x)} = u^{\left(\frac{1}{2}\right)}(x)$ | $D_u$ et $u(x) \geq 0$ | $g'(x) = \frac{1}{2} u^{\left(\frac{1}{2}-1\right)}(x) \times u'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ | $D_u$ et $u(x) > 0$ |

## VII) Tableau de variation de la fonction $f$ en fonction du signe de $f'$

**L'étude du signe** de la fonction $f'$ permet une étude des variations (croissance ou décroissance) de la fonction ***f*** sur des intervalles ***I*** *définis sur* $\mathbb{R} \subset D_f$ et permet de tracer le TABLEAU DE VARIATION de la fonction ***f***

**Propriétés** :

- Si $f'(x_0) > 0$ alors $f$ est strictement croissante sur un voisinage de $x_0$
- Si $f'(x_0) < 0$ alors $f$ est strictement décroissante sur un voisinage de $x_0$
- Si $f'(x_0) = 0$ alors $C_f$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse $x_0$

## VIII) Autres notions à comprendre et à retenir :

**1 )** Recherche des points appelés des ***« extremum locaux »*** à une courbe $C_f$

**Définition :**
Le point *A de coordonnées ( a ; f(a) )* est appelé ***« minimum local »*** si et seulement si $f(a) \leq f(x)$ sur un voisinage de *a*

Le point *A de coordonnées ( a ; f(a) )* est appelé ***« maximum local »*** si et seulement si $f(a) \geq f(x)$ sur un voisinage de *a*

**Propriété :** Si la fonction $f$ est une fonction dérivable et « est *définie autour de* *a* » alors :
le point *A de coordonnées ( a ; f(a) )* est un ***« extremum local »*** si et seulement si

$\boxed{f'(a) = 0 \text{ (. tangente horizontale ) et si } f'(x) \text{ change de signe en } a \text{ ( changement de monotonie )}}$

Remarque n° 1 : si $a \in \mathbb{R}$ est une borne de $D_f$ alors on considère que le point *A de coordonnées ( a ; f(a) )* est un ***« extremum local »*** *à la courbe* $C_f$ quel que soit $f'$

Remarque n° 2 : si $f'(a) = 0$ et si $f'(x)$ ne change pas de signe en *a* alors le point *A de coordonnées ( a ; f(a) )* est appelé un ***« point d'inflexion »*** *( la tangente traverse la courbe* $C_f$ *)*

**2 )** Notion de « **convexité** ou de **concavité** » d'une fonction $f$ sur un intervalle $\mathrm{I}$
Soit une fonction $f$ *2 FOIS DERIVABLES* sur un intervalle $\mathrm{I}$ donné $\subset D_f$

**Propriété :** *( propriété étudiée en classe de Terminale )*

- Si $f''(x) \geq 0$ sur $\mathrm{I}$ alors la fonction $f$ est **une fonction convexe** sur l'intervalle $\mathrm{I}$
  La courbe $C_f$ est ***« au-dessus »*** de toutes les tangentes à $C_f$ sur l'intervalle $\mathrm{I}$
  *Commentaire : On dit que la courbe* $C_f$ *est orientée vers* ***« le haut »***
- Si $f''(x) \leq 0$ sur $\mathrm{I}$ alors la fonction $f$ est **une fonction concave** sur l'intervalle $\mathrm{I}$
  La courbe $C_f$ est ***« au-dessous »*** de toutes les tangentes à $C_f$ sur l'intervalle $\mathrm{I}$
  *Commentaire : On dit que la courbe* $C_f$ *est orientée vers* ***« le bas »***